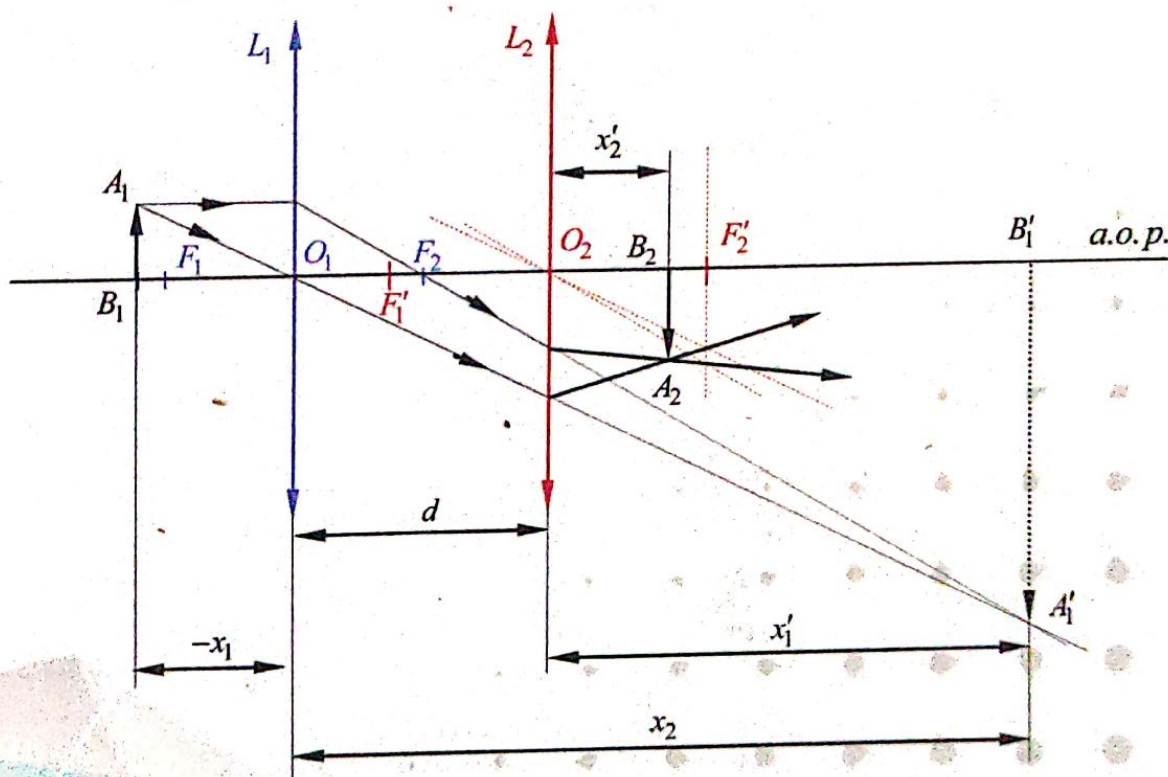
CARMEN DANIELA CĂPITANU

Bazele opticii geometrice



PRO UNIVERSITARIA

Carmen-Daniela CĂPITANU

BAZELE OPTICII GEOMETRICE





CUPRINS

INTRODUCERE

Încă din antichitate, lumina a fascinat şi a provocat imaginaţia oamenilor.

Ştiinţă a luminii, optica se ocupă cu studiul fenomenelor luminoase şi prezintă astăzi două ramuri majore: optica fizică şi optica geometrică. Dacă punctul de plecare al opticii fizice îl constituie natura luminii, în optica geometrică aceasta nu are importanţă. Oricare ar fi ea, fenomenele de bază la care participă sunt aceleaşi şi se supun aceloraşi legi şi principii – vorbim aici despre parcurgerea diferitelor medii optic transparente, despre reflexie şi refracţie.

Fiecare mediu pe care îl traversează lumina îi influenţează comportamentul într-un mod specific. În esenţă, spunea fizicianul Hideki Yukawa, natura este simplă. Selectând combinaţii de medii transparente, se pot construi sisteme optice al căror studiu scoate în evidenţă simplitatea legilor şi principiilor opticii geometrice, precum şi uşurinţa cu care ele pot fi folosite.

Lucrarea de faţă se adresează studenţilor şi profesorilor de fizică deopotrivă, dar este accesibilă şi celor care doresc să îşi formeze o bază în studiul opticii sau să o consolideze pe cea existentă. Fără a avea pretenţia de a trata toate temele care pot fi asociate cu optica geometrică, ea porneşte de la noţiuni simple pe care le dezvoltă până la concepte mai complexe, urmărindu-se o mai bună înţelegere şi aprofundare a acestora şi subliniind de fiecare dată modul în care au fost folosite legile şi principiile specifice, transformate aici în instrumente de lucru uşor de mânuit.

Înţelegerea şi aprofundarea conţinuturilor sunt facilitate şi de o serie de aplicaţii, prezente la finalul fiecărui capitol. În concordanţă fiind cu temele abordate, problemele propuse au rol nu doar de exersare a celor învăţate, ci şi de ghidare a gândirii şi, uneori, chiar a imaginaţiei, provocând cititorul să privească lucrurile într-o nouă perspectivă.

Considerăm astfel că sunt îndeplinite toate condiţiile pentru ca parcurgerea acestor pagini să se transforme într-o lectură interesantă, plăcută şi utilă.

CAPITOLUL 1. PRINCIPIILE GENERALE ALE OPTICII GEOMETRICE

1.1. Principii şi legi fundamentale în optica geometrică

Numeroase fenomene optice se explică cu ajutorul a trei legi simple: legea propagării rectilinii a luminii, legea reflexiei regulate a luminii şi legea refracţiei regulate a luminii. La aceste trei legi fundamentale se adaugă şi două principii ajutătoare: principiul independenţei propagării razelor de lumină şi principiul reversibilităţii drumului optic. Acestea se enunţă astfel:

1. *Legea propagării rectilinii a razelor de lumină*: într-un mediu omogen, lumina se propagă în linie dreaptă până la întâlnirea unui obstacol sau a unui alt mediu, cu alte caracteristici optice[1].

2. *Principiul independenţei propagării razelor de lumină*: razele de lumină necoerente care trec printr-un punct, întretăindu-se, nu se influenţează reciproc[2].

3. *Principiul reversibilităţii drumului razelor*: o rază care parcurge un sistem optic într-un sens urmează acelaşi drum şi când este dirijată prin sistemul optic în sens invers, dacă celelalte condiţii rămân neschimbate.

Aceste principii sunt susceptibile unor observaţii.

Primul principiu enunţat nu poate fi verificat direct, neputând fi imaginate experienţe care să dovedească acest enunţ, dar pot fi observate şi verificate consecinţele sale: fenomenul de umbră şi penumbră (figurile 1.1, 1.2 şi 1.3), formarea imaginilor în camera obscură, eclipsele de Soare şi de Lună, etc.

---

[1] cu un alt indice de refracţie

[2] nu interferă

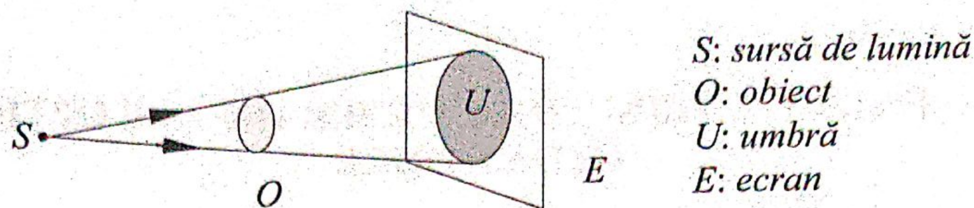


Figura 1.1. Producerea umbrei şi a penumbrei în cazul unei surse luminoase punctiforme

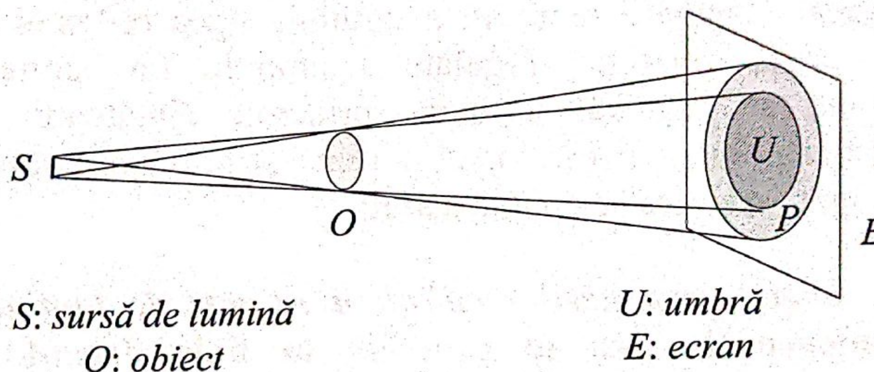


Figura 1.2. Producerea umbrei şi a penumbrei în cazul unei surse luminoase extinse

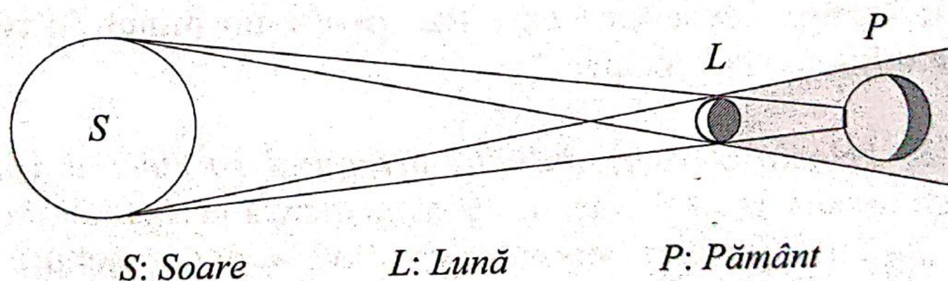


Figura 1.3. Producerea umbrei şi a penumbrei în cazul unei surse luminoase de dimensiuni foarte mari

În plus, în anumite condiţii, principiul propagării rectilinii a razelor de lumină nu mai este respectat. Dacă se îngustează diametrul unui fascicul prin diafragmare până la dimensiuni de ordinul zecimii de milimetru, se va constata că direcţia de propagare, după diafragmă, nu mai poate fi precizată: în locul unui fascicul paralel apare un fascicul divergent, cu intensitatea variind după direcţie[3].

[3] fenomenul de *difracţie*

1.2. Principiul lui Fermat. Reflexia şi refracţia luminii

Locul celor trei principii poate fi luat de ***principiul lui Fermat***, din care rezultă şi legile reflexiei şi refracţiei. Acest principiu se enunţă astfel: **drumul optic parcurs de o rază de lumină între două puncte este un extrem în raport cu oricare drum geometric posibil.**

Pentru a înţelege semnificaţia fizică a acestui enunţ, trebuie definit drumul optic parcurs de o rază de lumină, care este strâns legat de indicele de refracţie n al mediului traversat de acea rază de lumină.

Orice mediu optic transparent este caracterizat printr-un indice de refracţie, dat de raportul dintre viteza luminii în vid (c) şi viteza luminii în mediul respectiv (v):

$$n = \frac{c}{v}$$

În tabelul 1.1 se regăsesc valorile indicelui de refracţie pentru câteva materiale optic transparente.

Tabelul 1.1. Indicii de refracţie ai unor materiale uzuale

Nr. crt.	**Material**	n	**Nr. crt.**	**Material**	n
1	Acrilonitril stiren copolimer	1,56735	9	Fluorină	1,43
2	Aer	1,0003	10	Glicerină	1,473
3	Alcool etilic	1,361	11	Polimetilmetacrilat (*PMMA*)	1,49166
4	Apă la $37°C$	1,33093	12	Polistiren	1,59027
5	Apă la $20°C$	1,33299	13	Silicon	1,438
6	Benzen	1,501	14	Sticlă	1,5-1,8
7	Cornee	1,376	15	Umoare apoasă	1,336
8	Diamant	2,42	16	Umoare vitroasă	1,336

Dacă o rază parcurge într-un mediu de indice de refracţie n o distanţă l, se spune că a parcurs drumul optic:

$$[AB] = nl$$

care se va defini ca fiind distanţa pe care o parcurge în vid o altă rază de lumină, în timpul în care prima rază parcurge distanţa l în mediul de indice de refracţie n.

Fermat porneşte de la ideea că lumina întrebuinţează întotdeauna timpul minim pentru ca să ajungă de la un punct la altul, dar există cazuri (când este vorba despre reflexie) în care drumul este maxim sau staţionar.

1.2.1. Reflexia luminii

Se numeşte *reflexie* a luminii fenomenul de schimbare a direcţiei de propagare a acesteia, atunci când întâlneşte o suprafaţă de separare între două medii, ea întorcându-se în mediul din care a venit.

Se consideră o suprafaţă de separare (reflectătoare), cum este cea din figura 1.4, notată cu π.

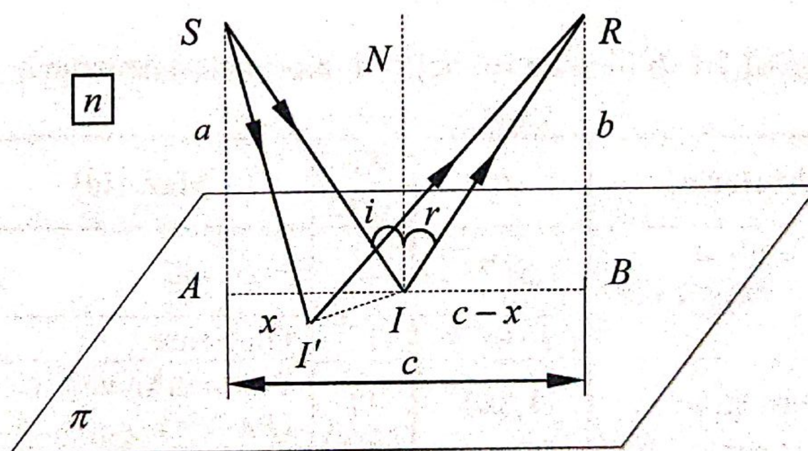


Figura 1.4. Stabilirea legilor reflexiei luminii cu ajutorul principiului lui Fermat

Prezintă importanţă următoarele:

a) determinarea planului care conţine razele incidentă şi reflectată

Fie S o sursă punctiformă de lumină de la care porneşte raza incidentă (SI). Construind raza reflectată (IR) şi normala la suprafaţa reflectătoare în punctul de incidenţă I (linia întreruptă IN), se obţine

planul $(SAIBR)$, perpendicular pe planul π, unde punctele A şi B reprezintă proiecţiile punctelor S şi P pe planul de separare π.

Se presupune că se poate găsi o altă traiectorie minimă, situată în alt plan, $(SI'R)$. Se proiectează această traiectorie pe planul care trece prin SR şi este perpendicular pe π (adică planul $(SAIBR)$) şi se obţine „drumul" SIR, care este mai mic decât $SI'R$:

$$\left.\begin{array}{l} SI' > SI \\ I'R > IR \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{SI' + I'R}_{drumul\ SI'R} > \underbrace{SI + IR}_{drumul\ SIR}$$

Se observă că, din punct de vedere geometric, s-au obţinut triunghiurile dreptunghice $\Delta SII'$ ($m\left(\widehat{SII'}\right) = 90°$), respectiv $\Delta RII'$ ($m\left(\widehat{RII'}\right) = 90°$), în care SI' şi RI' reprezintă ipotenuze, cu lungimea mai mare decât cea a catetelor SI, respectiv RI.

Rezultă astfel că **normala la suprafaţa de separaţie în punctul de incidenţă, raza incidentă şi cea reflectată se găsesc în acelaşi plan** (***legea I a reflexiei***).

b) determinarea direcţiei de propagare a razei reflectate

Prima lege a reflexiei stabileşte faptul că razele incidentă şi reflectată sunt coplanare. Planul comun conţine şi normala la suprafaţa de separaţie în punctul de incidenţă, care este responsabilă cu stabilirea orientării în spaţiu a planului pe care se produce reflexia. Cu toate acestea, cunoscând două puncte fixe prin care trece raza de lumină înainte şi după reflexie (S şi R), este necesar să cunoaştem relaţia dintre unghiurile de incidenţă şi cel de reflexie, pentru a putea caracteriza fenomenul pe deplin.

Deoarece, aşa cum s-a precizat, direcţia de propagare a razei incidente, respectiv a razei reflectate se stabilesc în raport cu normala IN, pornind de la ipoteza că S este o sursă punctiformă de lumină, fixă, de la care porneşte raza incidentă (SI), iar R este un punct fix al razei reflectate, prezintă interes poziţia exactă a punctului de incidenţă, I, în planul $(SAIBR)$, mai precis, pe segmentul AB.

Se notează distanţa $\|AB\| = c$, care este o constantă, în condiţiile în care punctele S şi R sunt fixate. Se obţine astfel drumul optic al luminii prin mediul n, între S şi R:

$$[SI]+[IR]=n\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}\right)$$

unde $a = SA$ şi $b = RB$ sunt, la rândul lor, două constante, datorită naturii punctelor S şi R (fixate). Deoarece drumul optic este extrem, se pune condiţia:

$$\frac{d}{dx}\left([SI]+[IR]\right)=0$$

de unde rezultă:

$$n\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{-(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right)=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Dar, conform figurii 1.4:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin i\,;\ \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=\sin r$$

şi astfel se obţine:

$$\sin i=\sin r \Rightarrow \boldsymbol{i=r}$$

relaţie care reprezintă **a doua lege a reflexiei**.

Prin urmare, punctul de incidenţă este astfel situat, încât unghiurile de incidenţă şi de reflexie, măsurate faţă de normala pe suprafaţa de separare în punctul de incidenţă, să fie congruente.

1.2.2. Refracţia luminii

Se numeşte *refracţie* a luminii fenomenul prin care lumina îşi schimbă direcţia de propagare atunci când trece dintr-un mediu optic transparent în altul.

a) determinarea planului care conţine razele incidentă şi refractată

Se consideră două medii optic transparente, având indicele de refracţie n_1, respectiv n_2, separate printr-o suprafaţă plană π. Fie un

punct I, situat la intersecţia dintre planul π şi planul normal la acesta, care conţine atât normala la suprafaţa de separaţie în punctul I, notată cu NI, cât şi două puncte considerate fixe între care se propagă lumina, aparţinând razelor incidentă, respectiv refractată; acestea se vor numi S şi R (figura 1.5).

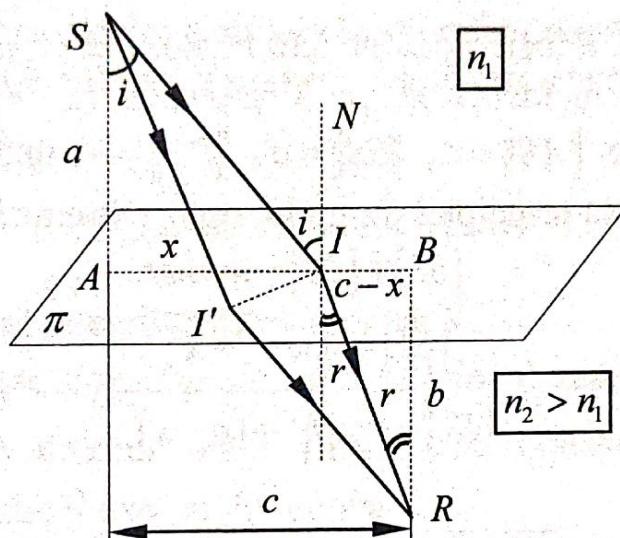


Figura 1.5. Stabilirea legilor refracţiei luminii cu ajutorul principiului lui Fermat

Se consideră pentru început că nu I este cel care ar aparţine traiectoriei minime, ci un alt punct, I', situat în alt plan. Se obţin astfel drumurile (SI') şi $(I'R)$, care sunt mai mari decât (SI) şi (IR):

$$\left.\begin{array}{l} SI' > SI \\ I'R > IR \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{SI' + I'R}_{drumul\ SI'R} > \underbrace{SI + IR}_{drumul\ SIR}$$

deci traiectoriei minime îi corespunde cazul în care I se află în planul ce conţine raza incidentă, normala şi raza refractată. Acest rezultat reprezintă de fapt ***prima lege a refracţiei***: **raza incidentă, raza refractată şi normala se află în acelaşi plan.**

b) determinarea direcţiei de propagare a razei refractate

Ca şi în cazul reflexiei, prima lege a refracţiei stabileşte care este planul în care are loc refracţia. Planul comun conţine, şi în acest caz, normala la suprafaţa de separaţie în punctul de incidenţă,

responsabilă cu stabilirea orientării în spaţiu a planului pe care are loc refracţia.

La fel ca şi în cazul reflexiei, se urmăreşte ca pornind de la două puncte fixe, considerate cunoscute, prin care trece raza de lumină înainte şi după refracţie, să se stabilească relaţia dintre unghiul de incidenţă şi cel de refracţie.

Fie S şi R cele două puncte fixate. Fie A proiecţia punctului S pe planul de incidenţă π şi B proiecţia lui R pe acelaşi plan. Folosind notaţiile $\|AB\| = c$, $\|SA\| = a$, $\|RB\| = b$, unde a, b şi c sunt constante, se aplică principiul drumului optic extrem al lui Fermat:

$$[SI] + [IR] = minim$$

$$[SI] = n_1\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$[IR] = n_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

deci:

$$n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2} = minim$$

condiţie care se scrie astfel:

$$\frac{d}{dx}\left([SI] + [IR]\right) = 0$$

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-n_2(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Dar, conform figurii 1.5:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin i;\quad \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin r$$

şi astfel rezultă:

$$\boldsymbol{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$$

Această relaţie se mai cunoaşte şi sub numele de ***legea Snell-Descartes*** şi reprezintă ***a doua lege a refracţiei***. Ea stabileşte faptul că direcţia de propagare a luminii în cel de-al doilea mediu este condiţionată atât de caracteristicile optice ale acestuia, cât şi de condiţiile de propagare a luminii în primul mediu, determinate de proprietăţile sale optice şi de unghiul de incidenţă.

În plus, această relaţie are o formă simetrică, ceea ce este în concordanţă cu faptul că fenomenul de refracţie nu depinde de sensul în care lumina traversează suprafaţa de separare dintre cele două medii (se regăseşte astfel principiul reversibilităţii).

Observaţie

Planul care conţine normala la suprafaţa de separaţie în punctul de incidenţă, raza incidentă şi raza reflectată/refractată poartă numele de *plan de incidenţă*.

1.3. Teorema lui Malus

Fie o sursă punctiformă de lumină, S.

Se numeşte *suprafaţă de undă* (Σ) locul geometric al punctelor M pentru care drumul optic $[SM]$ este constant, drumul fiind considerat de-a lungul razelor de lumină.

Se observă că dacă sursa punctiformă se află într-un mediu omogen, suprafeţele de undă sunt suprafeţe concentrice (figura 1.6), având centrul în S; se spune în acest caz că S este o sursă de unde sferice.

În cazul în care sursa se află la infinit, se spune că suprafeţele de undă sunt plane.

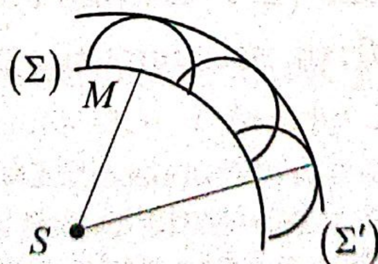


Figura 1.6. Formarea suprafeţelor de undă sferice (conform principiului lui Huygens)

Fie un sistem de raze de lumină SA, SB, ..., SM, astfel încât punctele A, B, ..., M se află pe aceeaşi suprafaţă de undă, (Σ_1) (figura 1.7), într-un mediu având indicele de refracţie n_1.

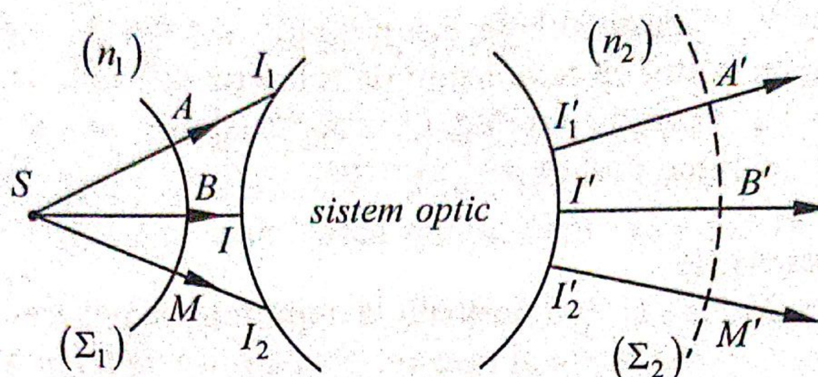


Figura 1.7. Ilustrarea teoremei lui Malus

După reflexii şi refracţii succesive pe suprafeţele unui sistem optic, aceste raze emerg într-un mediu cu indicele de refracţie n_2, pe direcţiile $I_1'A'$, $I'B'$, ..., $I_2'M'$.

Teorema lui Malus spune că dacă razele SA, SB, ..., SM sunt normale la suprafaţa de undă (Σ_1), atunci şi razele $I_1'A'$, $I'B'$, $I_2'M'$, care constituie fascicolul de lumină în al doilea mediu sunt normale la o aceeaşi suprafaţă de undă, (Σ_2), care se determină luând pe fiecare din raze drumuri optice egale:

$$[AI_1...I_1'A'] = [BI...I'B'] = [MI_2...I_2'M']$$

Cu alte cuvinte, razele unui fascicul homocentric divergent, care sunt normale la o suprafaţă (Σ_1) păstrează această proprietate după un număr oarecare de reflexii sau refracţii, rămânând normale la o suprafaţă (Σ_2).

Teorema lui Malus este o consecinţă a principiului lui Fermat şi permite definirea precisă a razelor de lumină ca normale la o infinitate de suprafeţe, introducând astfel noţiunea de suprafaţă de undă geometrică.

Fiecărui drum optic îi corespunde o suprafaţă de undă şi astfel se poate face trecerea la optica ondulatorie, unde suprafaţa de undă reprezintă locul geometric al punctelor aflate în aceeaşi stare de vibraţie[4]. Între două suprafeţe de undă razele de lumină străbat drumuri optice egale.

---

[4] Suprafaţa respectivă se numeşte suprafaţă echifază

1.4. Fascicole homocentrice

Fie o sursă punctiformă, S. Razele de lumină care provin de la aceasta se propagă în spaţiu formând suprafeţe de undă sferice şi pot ocupa întregul spaţiu din jurul punctului; ele formează în acest caz un fascicul de raze nedelimitat.

Dacă razele unui fascicul se intersectează în acelaşi punct, el se numeşte *fascicul homocentric* (conic, izogen). Punctul de intersecţie poartă numele de *centru al fascicolului*.

Dacă razele fascicolului se îndepărtează de centru, fascicolul este *homocentric divergent* (figura 1.8.*a*).

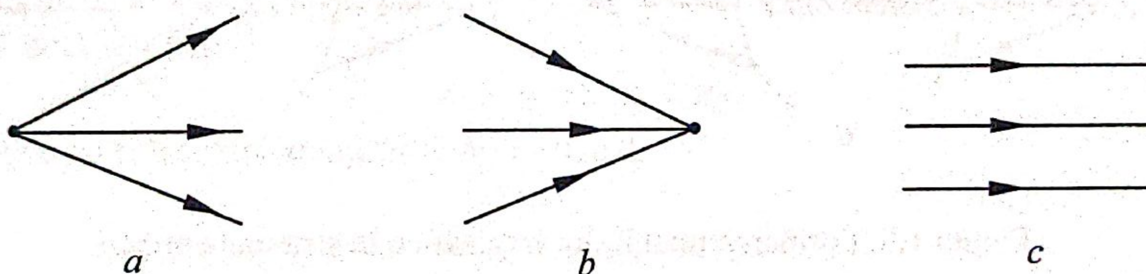


Figura 1.8. Fascicole homeocentrice

Dacă razele fascicolului se apropie de centru, fascicolul este *homocentric convergent* (figura 1.8.*b*), iar dacă punctul de intersecţie al razelor se află la infinit, el se numeşte *homocentric paralel* (figura 1.8.*c*).

Fascicolelor homocentrice convergente şi divergente le corespund suprafeţe de undă sferice, în timp ce fascicolelor paralele le corespund suprafeţe de undă plane, razele fascicolului fiind perpendiculare (normale) la aceste suprafeţe.

Un fascicul homocentric este caracterizat prin deschiderea sa, care este unghiulară în cazul fascicolului conic (unghi interior al conului geometric) sau liniară, în cazul fascicolului cilindric (diametrul cilindrului geometric).

1.5. Stigmatism şi astigmatism

Din punctul de vedere al opticii geometrice, orice punct luminos poate fi privit ca vârf al unui fascicul divergent de raze.

Dacă, după ce străbate un sistem optic, un fascicul homocentric divergent cu vârful în punctul S rămâne tot homocentric, dar convergent, atunci punctul de convergenţă S' poartă numele de *imagine stigmatică reală* a punctului luminos S (figura 1.9.*a*).

Dacă după parcurgerea sistemului optic, fascicolul divergent rămâne divergent, atunci punctul de intersecţie S'' al prelungirilor razelor emergente poartă numele de *imagine stigmatică virtuală* a punctului S (figura 1.9.*b*).

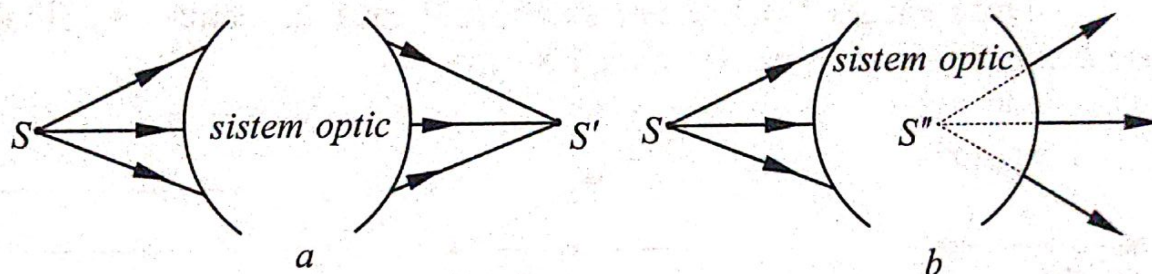


Figura 1.9. Formarea imaginilor stigmatice în sistemele optice

Cele două tipuri de imagini poartă numele de imagini stigmatice, deoarece fiecărui punct obiect îi corespunde un punct imagine. Condiţia de stigmatism este îndeplinită dacă unui punct obiect îi corespunde un singur punct imagine.

Observaţii

1. În situaţia descrisă mai sus, dacă sensul de parcurgere a sistemului optic de către lumină este inversat, conform principiului reversibilităţii drumului razelor de lumină, imaginea poate fi privită ca sursă luminoasă, iar sursa devine imagine (punctiforme).

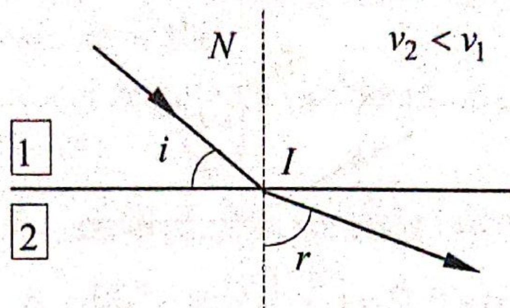
2. Dacă fascicolul îşi pierde proprietatea de homocentricitate, imaginea nu mai este una stigmatică, deci unei surse punctiforme nu îi mai corespunde o imagine punctiformă. În acest caz, imaginea poartă numele de *imagine astigmatică*.

1.6. Aplicaţii

Problema nr. 1.

Găsiţi greşelile din figurile de mai jos:

a)

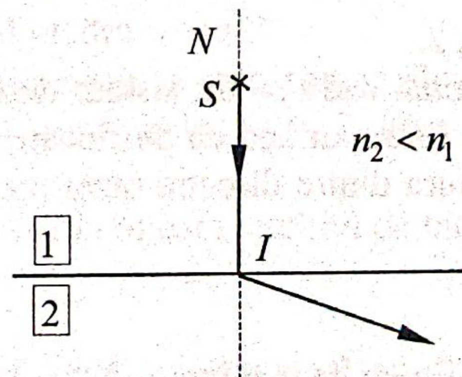


- unghiul de incidenţă este unghiul făcut de raza incidentă cu normala la suprafaţa de separare în punctul de incidenţă
- dacă viteza de propagare a luminii este mai mare în primul mediu decât în al doilea, înseamnă că primul mediu este mai puţin dens decât al doilea, deci:

$$v_1 > v_2 \Rightarrow n_1 < n_2$$

iar raza refractată se apropie de normală

b)

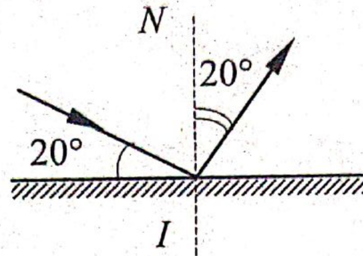


- în situaţia din figură, unghiul de incidenţă este $\sphericalangle(SI, NI) = 0$, caz cunoscut ca *incidenţă normală*
- unghiul de incidenţă fiind nul, conform legii a II-a a refracţiei, rezultă:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_2}{n_1} \sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin 0 = 0 \Rightarrow r = 0$$

- prin urmare, indiferent de relaţia dintre indicii de refracţie ai celor două medii, la incidenţa normală, lumina intră în al doilea mediu nedeviată

c)



- conform legii a doua a reflexiei, unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de refracţie
- deoarece unghiul de incidenţă este făcut de raza incidentă cu normala la suprafaţa de separaţie în punctul de incidenţă, iar unghiul de reflexie este unghiul dintre raza reflectată şi aceeaşi normală, conform figurii, unghiul de incidenţă este:

$$i = 90° - 20° = 70°(= r)$$

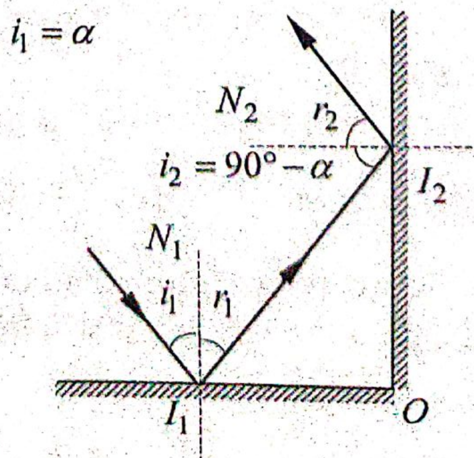
deci şi unghiul de reflexie trebuie să aibă valoarea de 70°

Problema nr. 2.

O rază de lumină cade pe un sistem de două oglinzi situate în plane perpendiculare. Presupunând că pe fiecare oglindă are loc câte o reflexie, stabiliţi legătura dintre direcţia razei incidente şi direcţia razei emergente.

Rezolvare

- situaţia e descrisă în figura de mai jos:



- conform legii a doua a reflexiei, lumina părăseşte prima oglindă sub un unghi $r_1 = i_1 = \alpha$ faţă de normală
- din geometria problemei rezultă că incidenţa pe a doua oglindă are loc sub un unghi $i_2 = 90° - \alpha$:

$$\widehat{N_1 I_1 I_2} \equiv \widehat{O I_2 I_1} = \alpha \text{ (alterne interne)}$$

$$i_2 = 90° - m\left(\widehat{O I_2 I_1}\right) = 90° - \alpha$$

- rezultă că unghiul de emergenţă este:

$$r_2 = i_2 = 90° - \alpha$$

- se observă că unghiul dintre raza incidentă pe sistem şi faţa primei oglinzi are valoarea $90° - \alpha$, ceea ce înseamnă că raza emergentă este paralelă cu cea incidentă

Problema nr. 3.

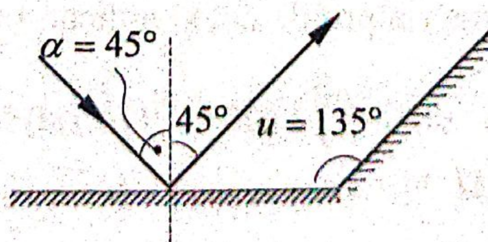
O rază de lumină cade sub un unghi de incidenţă α pe o oglindă plană, care este componentă a unui sistem de două oglinzi plane, care fac unghiul diedru $u > 90°$.

a) Determinaţi pentru ce valoare a unghiului u, raza emergentă, obţinută prin reflexia pe ambele oglinzi, este perpendiculară pe cea incidentă

b) Analizaţi situaţia în care unghiul de incidenţă este $\alpha = 55°$.

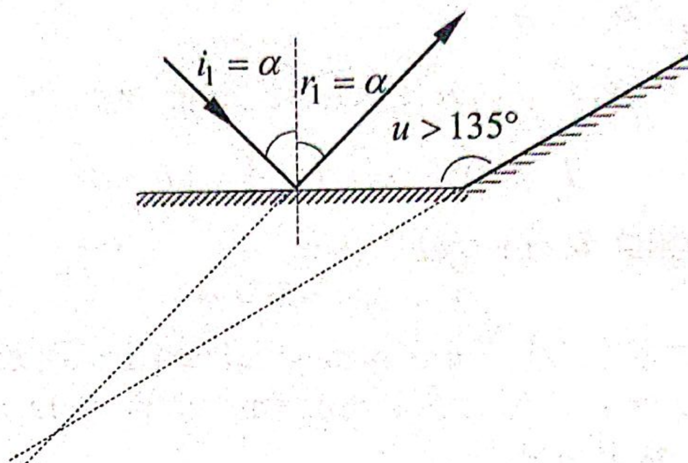
Rezolvare

- dacă unghiul de incidenţă α este egal cu $u - 90°$, raza de lumină reflectată de prima oglindă va fi paralelă cu cea de a doua oglindă

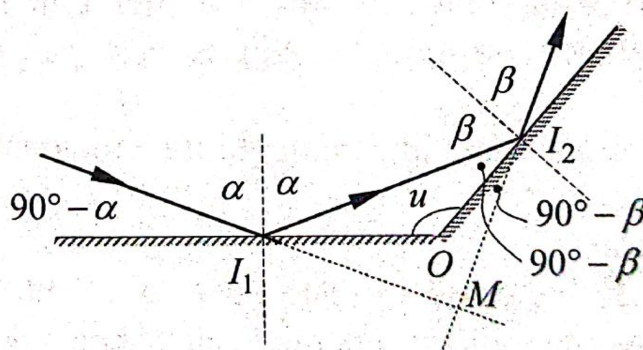


- dacă se consideră că raza de lumină reflectată de prima oglindă este raza emergentă (deşi ea nu îndeplineşte toate cerinţele problemei !), pentru ca să fie perpendiculară pe raza incidentă, trebuie ca $\alpha = 45°$, deci $u = 90° + 45° = 135°$

- dacă unghiul de incidență α este mai mic decât $u-90°$, este adevărată situația din figură[5]:



- se observă că nu poate fi îndeplinită condiția de reflexie pe ambele oglinzi ale sistemului
- dacă unghiul de incidență α este mai mare decât $u-90°$, este adevărată situația din figură[6]:



- ținând cont de geometria problemei și aplicând a doua lege a reflexiei, se poate scrie:

$$\Delta I_1 I_2 O: u + (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180° \Rightarrow u = \alpha + \beta$$

- în triunghiul $\Delta I_1 I_2 M$:

---

[5] Deoarece $i = \alpha = r$, condiția ca raza reflectată de prima oglindă să nu întâlnească a doua oglindă se scrie:

$$r + 90° < u \Rightarrow r < u - 90° \Rightarrow i < u - 90°$$

[6] Ținând cont de faptul că $i = \alpha = r$, dacă se pune condiția ca raza reflectată de prima oglindă să întâlnească a doua oglindă, se poate scrie:

$$r + 90° > u \Rightarrow r > u - 90° \Rightarrow i > u - 90°$$

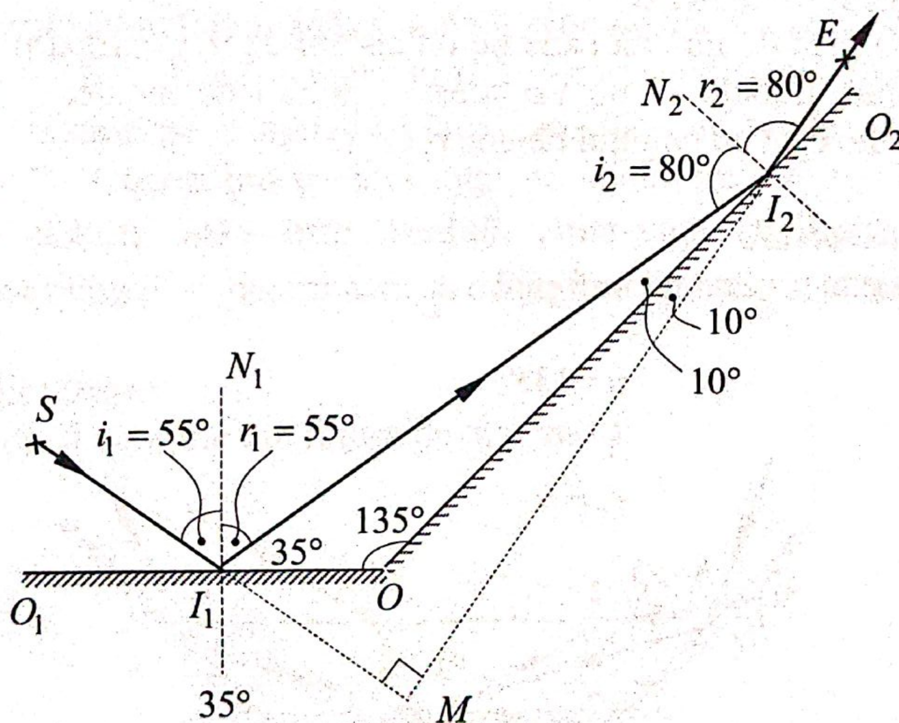
$$m\left(\widehat{I_2I_1M}\right)+m\left(\widehat{I_1I_2M}\right)+m\left(\widehat{I_1MI_2}\right)=180°$$

$$2(90°-\alpha)+2(90°-\beta)+90°=180° \Rightarrow \alpha+\beta=135° \Rightarrow u=135°$$

de unde rezultă că, indiferent de unghiul de incidenţă, raza emergentă este perpendiculară pe cea incidentă dacă unghiul diedru alcătuit de cele două oglinzi plane este de 135°

- prin urmare, pentru un unghi diedru mai mare de 90°, singura posibilitate care respectă cerinţele este cea prezentată în situaţia 2
- refacem calculele pentru unghiul de incidenţă $\alpha=55°$:

$$i_1=55° \Rightarrow r_1=55°$$



- din geometria problemei:

$$m\left(\widehat{I_2I_1O}\right)=90°-r_1=90°-55°=35°$$

$$m\left(\widehat{I_1I_2O}\right)=180°-35°-135°=10°$$

$$m\left(\widehat{I_1I_2N_2}\right)=i_2=90°-10°=80°=r_2$$

- se observă că:

$$m\left(\widehat{OI_1M}\right)=m\left(\widehat{SI_1M}\right)=35°\text{(opuse la vârf)}$$

$$m\left(\widehat{I_2I_1M}\right)=m\left(\widehat{I_2I_1O}\right)+m\left(\widehat{OI_1M}\right)=70°$$

$$m\left(\widehat{OI_2M}\right)=m\left(\widehat{EI_2O_2}\right)=10°(\text{opuse la vârf})$$

$$m\left(\widehat{I_1I_2M}\right)=m\left(\widehat{OI_2M}\right)+m\left(\widehat{OI_2I_1}\right)=20°$$

de unde rezultă:

$$m\left(\widehat{I_1MI_2}\right)=180°-m\left(\widehat{I_2I_1M}\right)-m\left(\widehat{I_1I_2M}\right)=90°$$

deci raza emergentă este perpendiculară pe raza incidentă

Problema nr. 4.

O rază de lumină cade pe un sistem de trei oglinzi plane, ca în figură. Care trebuie să fie valoarea unghiului de incidenţă, pentru ca acesta să fie egal cu unghiul de emergenţă?

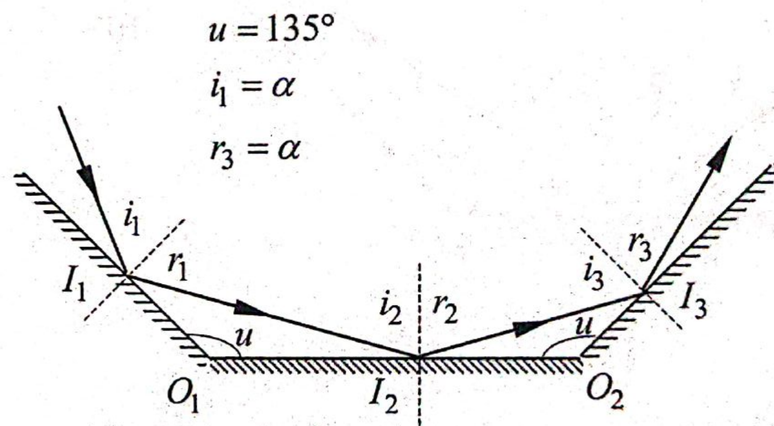
Rezolvare

- situaţia este prezentată în figură:

$u=135°$

$i_1=\alpha$

$r_3=\alpha$



- din geometria problemei, folosind legea a doua a reflexiei, rezultă:

$$m\left(\widehat{I_2I_1O_1}\right)=90°-\alpha$$

$$m\left(\widehat{I_1I_2O_1}\right)=180°-m\left(\widehat{I_2I_1O_1}\right)-m\left(\widehat{I_1O_1I_2}\right)=180°-(90°-\alpha)-135°=\alpha-45°$$

$$i_2=90°-m\left(\widehat{I_1I_2O_1}\right)=90°-(\alpha-45°)=135°-\alpha \Rightarrow r_2=135°-\alpha$$

$$m\left(\widehat{I_3I_2O_2}\right)=90°-r_2=90°-(135°-\alpha)=\alpha-45°$$

$$m\left(\widehat{I_2I_3O_2}\right)=180°-m\left(\widehat{I_3I_2O_2}\right)-m\left(\widehat{I_2O_2I_3}\right)=180°-(\alpha-45°)-135°$$

$$m\left(\widehat{I_2I_3O_2}\right)=90°-\alpha$$

- rezultă astfel:

$$i_3=90°-m\left(\widehat{I_2I_3O_2}\right)=90°-(90°-\alpha)=\alpha=r_3$$

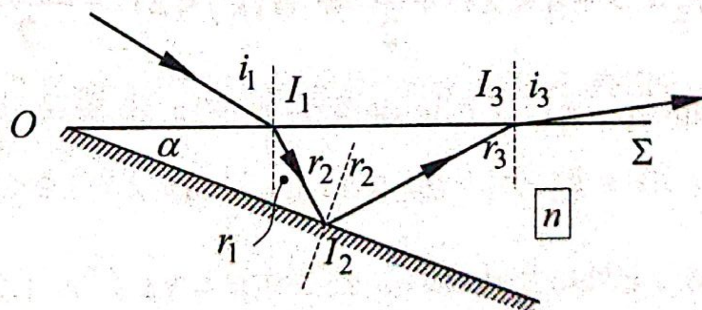
deci oricare ar fi unghiul de incidenţă acesta va fi egal cu unghiul de emergenţă, pentru sistemul considerat

Problema nr. 5.

O rază de lumină provenind de la o sursă punctiformă situată în aer întâlneşte suprafaţa plană Σ a unui bloc de sticlă având indicele de refracţie $n=1,5$. După ce parcurge o anumită distanţă în sticlă, ea suferă o reflexie pe o oglindă plană care face un unghi $\alpha=25°$ cu suprafaţa Σ. Cunoscând că incidenţa pe sticlă are loc sub un unghi $i_1=60°$, stabiliţi dacă este posibilă emergenţa sticlă-aer. Stabiliţi valoarea unghiului α pentru care să existe emergenţă sticlă-aer.

Rezolvare

- se vor folosi notaţiile din figura de mai jos:



- la refracţia aer-sticlă, în punctul de incidenţă I_1:

$$n_{aer}\sin i_1=n\sin r_1\ \Rightarrow\ \sin r_1=\frac{n_{aer}}{n}\sin i_1=\frac{1}{1,5}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ r_1\cong 35°$$

- în triunghiul ΔOI_1I_2:

$$m\left(\widehat{I_1OI_2}\right)+m\left(\widehat{OI_2I_1}\right)+m\left(\widehat{I_2I_1O}\right)=180°$$

$$\alpha+(90°-r_2)+(90°+r_1)=180°\ \Rightarrow\ r_2=\alpha+r_1=25°+35°=60°$$

- în triunghiul $\Delta I_1 I_2 I_3$:

$$m\left(\widehat{I_1 I_2 I_3}\right)+m\left(\widehat{I_2 I_3 I_1}\right)+m\left(\widehat{I_3 I_1 I_2}\right)=180°$$

$$2r_2+\left(90°-r_3\right)+\left(90°-r_1\right)=180° \Rightarrow r_3=2r_2-r_1=85°$$

- la refracţia sticlă-aer, în punctul de incidenţă I_3:

$$n\sin r_3=n_{aer}\sin i_3 \Rightarrow \sin i_3=\frac{n}{n_{aer}}\sin r_3 \cong 1,49>1$$

deci refracţia sticlă-aer nu poate avea loc

Observaţie

- dacă se ţine cont de faptul că unghiul limită la refracţia dintr-un mediu având indicele de refracţie egal cu 1,5 în aer este de aproximativ $42°$, se vede că r_3 este mai mare decât acesta, deci va apărea reflexia totală

- pentru a avea rază emergentă, trebuie îndeplinită condiţia:

$$r_3<42° \Rightarrow 2r_2-r_1<42° \Rightarrow r_2<21°+\frac{r_1}{2}$$

- ţinând cont de expresia lui r_2, rezultă:

$$r_2=\alpha+r_1<21°+\frac{r_1}{2} \Rightarrow \alpha\left(i_1\right)<21°-\frac{r_1\left(i_1\right)}{2}$$

unde dependenţa $r_1=r_1\left(i_1\right)$ este dată de relaţia $\sin r_1=\frac{n_{aer}}{n}\sin i_1$

CAPITOLUL 2. OGLINZI

Se numesc *oglinzi* sistemele optice care determină schimbarea direcţiei de propagare a luminii prin reflexie.

2.1. Oglinzi sferice

Oglinda a cărei faţă reflectătoare este o porţiune dintr-o sferă poartă numele de *oglindă sferică*.

Oglinzile sferice pot fi convexe (divergente) sau concave (convergente). Ele sunt caracterizate de (figura 2.1):

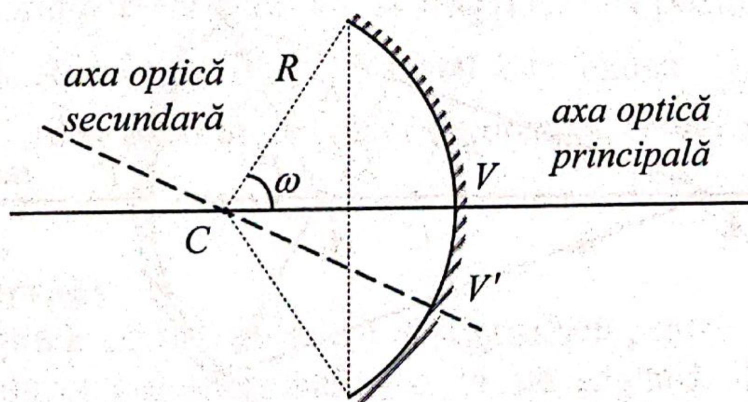


Figura 2.1. Elementele unei oglinzi sferice

- raza de curbură (R), egală cu raza de curbură a sferei din care face parte oglinda
- centrul oglinzii (C), care coincide cu centrul sferei din care face parte oglinda
- axa optică principală: dreapta care uneşte vârful V al calotei sferice cu centrul sferei (CV)
- axa optică secundară: dreapta care uneşte un punct al calotei sferice (diferit de vârf) cu centrul sferei
- deschiderea oglinzii: unghiul solid 2ω sub care se vede calota din centrul de curbură

Unghiul ω este unghiul cel mai mare pe care îl poate face normala într-un punct oarecare al oglinzii cu axa optică.

2.2. Formarea imaginilor în oglinzi sferice

În cele ce urmează, se va studia formarea imaginilor în oglizile sferice, în condiţiile unor fasciculele incidente largi.

2.2.1. Imaginea sagitală

Fie un obiect punctiform A_1 situat pe axa optică principală a unei oglinzi sferice concave (figura 2.2).

Toate razele care cad pe oglindă sub acelaşi unghi de incidenţă i se întâlnesc după reflexie în A_2.

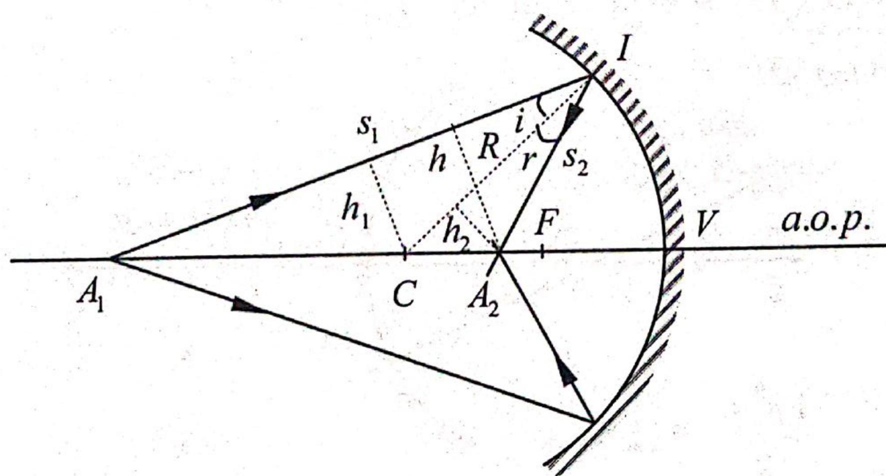


Figura 2.2. Formarea imaginii sagitale în oglinda sferică

Se formează astfel două conuri de raze, unul cu vârful în obiectul A_1, iar celălalt cu vârful în imaginea A_2 (*imaginea sagitală*).

Cu notaţiile din figură, se poate scrie:

$$S_{\Delta A_1 I A_2} = S_{\Delta A_1 IC} + S_{\Delta A_2 IC}$$

$$\frac{s_1 h_1}{2} + \frac{R h_2}{2} = \frac{s_1 h}{2}$$

$$\sin i = \frac{h_1}{R} \Rightarrow h_1 = R \sin i$$

$$\sin r = \frac{h_2}{s_2} \Rightarrow h_2 = s_2 \sin r$$

$$\sin(i+r)=\frac{h}{s_2} \Rightarrow h=s_2\sin(i+r)$$

Se înlocuieşte în suma ariilor şi rezultă:

$$s_1 R\sin i + Rs_2\sin r = s_1 s_2\sin(i+r)$$

$$s_1 R\sin i + Rs_2\sin r = s_1 s_2(\sin i\cos r + \sin r\cos i)$$

Deoarece $i=r$, conform legii a doua a reflexiei, relaţia de mai sus devine:

$$s_1 R + Rs_2 = 2s_1 s_2\cos i \quad |:s_1 s_2 R$$

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{2\cos i}{R}$$

relaţie care reprezintă *ecuaţia imaginii sagitale* pentru oglinzile sferice.

Conform acestui rezultat, $s_2=s_2(i)$, deci poziţia imaginii A_2 depinde de valoarea unghiului *i*. Variind *i*, imaginea A_2 se va deplasa pe axa A_1CA_2, descriind un segment de dreaptă, numit *focala sagitală* (*radială*).

Observaţii

1. Oglinda sferică nu prezintă stigmatism pentru fascicole largi, unui punct obiect corespunzându-i o focală sagitală, determinată de valorile unghiului de incidenţă

2. Dacă unghiurile de incidenţă sunt foarte mici, $\cos i\approx 1$, iar ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{2}{R}$$

deci $s_2\neq s_2(i)$;poziţia imaginii sagitale nu depinde de unghiul de incidenţă.

Condiţia ca unghiurile de incidenţă să fie foarte mici implică existenţa unui fascicul incident foarte îngust, cuprinzând raze foarte apropiate de axa optică principală a oglinzii şi defineşte aşa-numita aproximaţie a razelor paraxiale a lui Gauss. Rezultă astfel că oglinzile sferice prezintă un stigmatism aproximativ, convenabil, în această aproximaţie.

3. Dacă raza R a oglinzii sferice este foarte mare, practic $R \to \infty$, atunci se spune că oglinda este plană. În acest caz, ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0 \Rightarrow s_2 = -s_1$$

Este important faptul că $s_2 \neq s_2(i)$, adică poziţia imaginii sagitale nu depinde de unghiul de incidenţă; implicit, ea nu depinde de deschiderea fascicolului, deci oglinda plană este stigmatică pentru orice punct obiect. Mai mult, imaginea este simetrica obiectului faţă de oglindă, formându-se la aceeaşi distanţă faţă de oglindă ca şi obiectul, dar de cealaltă parte a acesteia.

4. Ecuaţia imaginii sagitale a oglinzilor sferice se poate obţine din ecuaţia imaginii sagitale a dioptrului sferic, punând condiţia ca raza emergentă să se reflecte ($n_2 = -n_1$).

2.2.2. Imaginea tangenţială

Razele din figura 2.2 pot fi grupate şi altfel.

Fie două raze care pleacă din punctul A, aflate în acelaşi plan meridian (care cuprinde axa optică şi razele incidente), dar care fac unghiuri diferite cu normala (figura 2.3). După reflexie, acestea se întâlnesc în T (*imaginea tangenţială, meridională*).

Punctele de incidenţă I_1 şi I_2 se consideră foarte apropiate.

Se notează cu u_1, respectiv $u_1 + du_1$, unghiurile pe care le fac cele două raze incidente cu axa optică, iar unghiurile pe care le fac cele două raze reflectate cu axa optică cu u_2, respectiv $u_2 + du_2$.

Unghiul ω este unghi exterior triunghiului ΔAI_1C:

$$\omega = u_1 + i$$

Unghiul u_2 este unghi exterior triunghiului ΔA_1I_1C:

$$u_2 = \omega + r = \omega + i$$

Comparând relaţiile, rezultă:

$$2\omega = u_1 + u_2$$

respectiv, prin diferenţierea relaţiei de mai sus:

$$2d\omega = du_1 + du_2$$

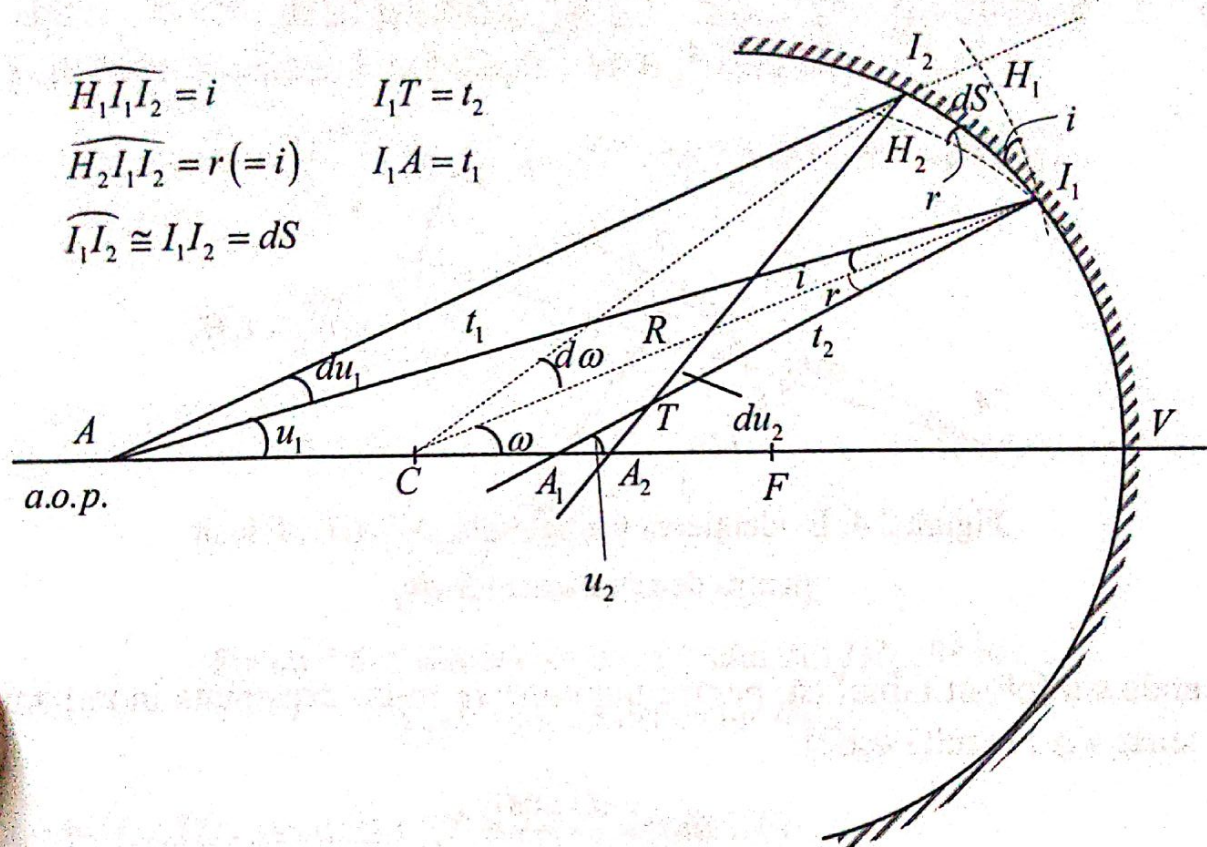


Figura 2.3. Formarea imaginii tangenţiale în oglinda sferică

Pentru a obţine o legătură între distanţele t_1 şi t_2, se construieşte un arc de cerc de rază t_1, având centrul în A. Acesta intersectează raza AI_2 în H_1. Unghiurile care se formează fiind mici, $\widehat{I_2I_1H_1} = i$, arcul $\widehat{I_1I_2}$ corespunde unghiului la centru $d\omega$, iar arcul $\widehat{I_1H_1}$ corespunde unghiului la centru du_1.

În triunghiul $\Delta I_1I_2H_1$, considerat dreptunghic în H_1, se poate scrie:

$$\cos i = \frac{I_1H_1}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_1 = I_1I_2 \cos i = dS \cos i$$

Se observă că triunghiul ΔI_1AH_1 este isoscel ($I_1A \equiv AH_1 = t_1$) şi, conform figurii 2.4:

$$\sin\frac{du_1}{2}=\frac{\frac{I_1H_1}{2}}{I_1A}\Rightarrow du_1=\frac{I_1H_1}{I_1A}=\frac{I_1H_1}{t_1}$$

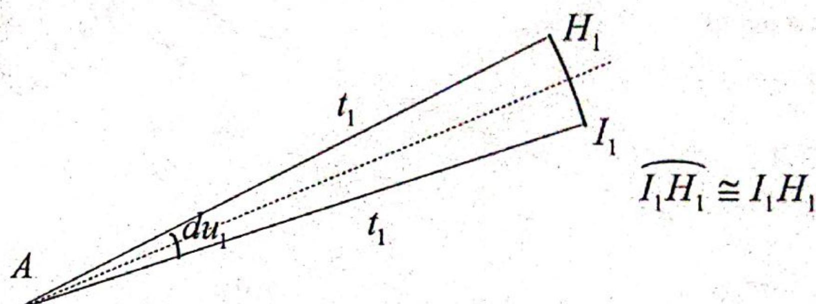


Figura 2.4. Evidenţierea triunghiului ΔI_1AH_1, folosit pentru determinarea lui du_1

unde s-a folosit faptul că, pentru unghiuri α mici, exprimate în radiani, $\sin\alpha\approx\alpha$; rezultă astfel:

$$du_1=\frac{dS\cos i}{t_1}$$

Analog, în ΔI_1I_2C, isoscel $\left(I_2C\equiv I_1C=R\right)$, se poate scrie conform figurii 2.5:

$$\left.\begin{array}{l}\sin d\omega=\dfrac{I_1I_2}{CI_1}\approx d\omega\\ CI_1=R\end{array}\right\}\Rightarrow d\omega=\frac{dS}{R}$$

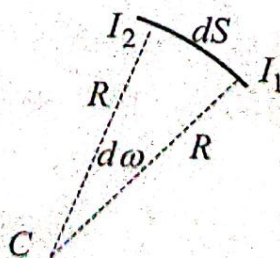


Figura 2.5. Evidenţierea triunghiului ΔI_1I_2C, folosit pentru determinarea lui $d\omega$

Se construieşte un arc de cerc cu centrul în T şi cu raza t_2 şi se obţine punctul H_2 la intersecţia cu A_2I_2. Din triunghiul $\Delta I_1I_2H_2$ curbiliniu, considerat dreptunghic în H_2, rezultă:

$$\cos r = \frac{I_1H_2}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_2 = I_1I_2 \cos r = dS \cos r = dS \cos i$$

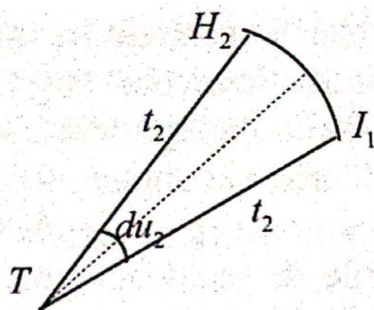


Figura 2.6. Evidenţierea triunghiului ΔI_1TH_2, folosit pentru determinarea lui du_2

iar în ΔI_1TH_2, isoscel ($I_1T \equiv TH_2$, figura 2.6):

$$\sin\frac{du_2}{2} = \frac{\frac{I_1H_2}{2}}{I_1T} \Rightarrow du_2 = \frac{I_1H_2}{I_1T} = \frac{I_1H_2}{t_2}$$

de unde, cunoscând expresia lui I_1H_2, rezultă:

$$du_2 = \frac{dS \cos i}{t_2}$$

Cu ajutorul relaţiilor obţinute pentru $d\omega$, du_1 şi du_2 se poate scrie:

$$2\frac{dS}{R} = \frac{dS \cos i}{t_1} + \frac{dS \cos i}{t_2} \quad \Big|: dS \cos i$$

$$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{R}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{i}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t_2}}$$

Această relaţie poartă numele de *ecuaţia imaginii tangenţiale* şi dă poziţia imaginii tangenţiale.

Dacă se deplasează planul meridian în care se află razele AI_1 şi

AI_2 (care au condus la formarea imaginii T), la stânga şi la dreapta poziţiei iniţiale, punctul T descrie un mic segment de dreaptă, numit *focala tangenţială*, perpendiculară pe poziţia mijlocie a planului meridian şi, deci, perpendiculară pe focala sagitală care se află în acest plan.

Observaţii

1. Existenţa focalei tangenţiale ne arată că oglinda sferică nu prezintă stigmatism pentru fascicole largi, situate în acelaşi plan meridian, unui punct obiect corespunzându-i o imagine tangenţială, determinată de valorile diferite ale unghiului de incidenţă

2. Dacă unghiurile de incidenţă sunt foarte mici, $\cos i \approx 1$, iar ecuaţia imaginii tangenţiale devine:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{R}$$

deci $t_2 \neq t_2(i)$. Aceasta înseamnă, pe de o parte, că poziţia imaginii tangenţiale nu depinde de unghiul de incidenţă, iar pe de altă parte, că suntem în condiţiile aproximaţiei razelor paraxiale a lui Gauss. Rezultă astfel că în aceste condiţii, oglinzile sferice prezintă un stigmatism aproximativ, convenabil.

Comparând acest rezultat cu ecuaţia imaginii sagitale pentru oglinda sferică, în aproximaţia razelor paraxiale, se observă că se pot pune condiţiile:

$$s_1 = p_1 = t_1 = \text{ distanţa oglindă-obiect}$$

$$s_2 = p_2 = t_2 = \text{ distanţa oglindă-imagine}$$

de unde rezultă ecuaţia punctelor conjugate (obiect - imagine !) pentru oglinzile sferice în aproximaţia lui Gauss:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p_1}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p_2}}=\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{R}}$$

3. Dacă raza R a oglinzii sferice este foarte mare, practic $R \to \infty$, atunci oglinda este plană; ecuaţia imaginii tangenţiale devine:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=0 \Rightarrow t_2=-t_1$$

rezultat din care se reţine faptul că $t_2 \neq t_2(i)$, adică poziţia imaginii tangenţiale nu depinde de unghiul de incidenţă; implicit, nu depinde de deschiderea fascicolului, deci oglinda plană este stigmatică pentru orice punct obiect, imaginea fiind şi de această dată simetrica obiectului faţă de oglindă, formându-se la aceeaşi distanţă faţă de oglindă ca şi obiectul, dar de cealaltă parte a oglinzii.

4. Ecuaţia imaginii tangenţiale a oglinzilor sferice se poate obţine din ecuaţia imaginii tangenţiale a dioptrului sferic, punând condiţia ca raza emergentă să se reflecte, adică $n_2 = -n_1$.

2.3. Oglinzi sferice în aproximaţia lui Gauss

Aşa cum s-a arătat deja, în aproximaţia lui Gauss, razele de lumină cad pe oglindă sub un unghi de incidenţă mic ($\omega < 5°$, unde 2ω reprezintă deschiderea oglinzii). Studiind formarea imaginilor sagitală, respectiv tangenţială în această situaţie, s-a observat că ecuaţiile corespunzătoare conduc la o formă unică (ecuaţia punctelor conjugate)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R}$$

unde x_1, respectiv x_2 reprezintă distanţele oglindă-obiect, respectiv oglindă-imagine.

2.3.1. Caracterizarea oglinzilor

Razele incidente, paralele cu axa optică principală, se strâng după reflexie într-un singur punct, numit *focar principal imagine al oglinzii*, a cărui poziţie se determină folosind ecuaţia punctelor conjugate:

$$x_1 \to \infty \Rightarrow f_2 = \lim_{x_1 \to \infty} x_2 = \frac{R}{2}$$

Dacă de la un obiect punctiform, situat pe axa optică principală, pornesc raze de lumină care, după reflexie, părăsesc oglinda paralel cu axa optică principală, spunem că obiectul este situat în *focarul principal obiect* al oglinzii sferice:

$$x_2 \to \infty \Rightarrow f_1 = \lim_{x_2 \to \infty} x_1 = \frac{R}{2}$$

situat şi el la jumătatea distanţei dintre vârf şi centru, la fel ca şi focarul principal imagine. Acest rezultat putea fi anticipat, pornind de la simplul considerent că oglinda sferică este un sistem optic în care imaginile se formează pe baza reflexiei, deci prin întoarcerea razei de lumină în mediul din care a venit.

Se poate formula concluzia că o oglindă sferică are un singur focar, situat la jumătatea distanţei dintre vârf şi centru (figura 2.7).

$$f = \frac{CV}{2} = \frac{R}{2}$$

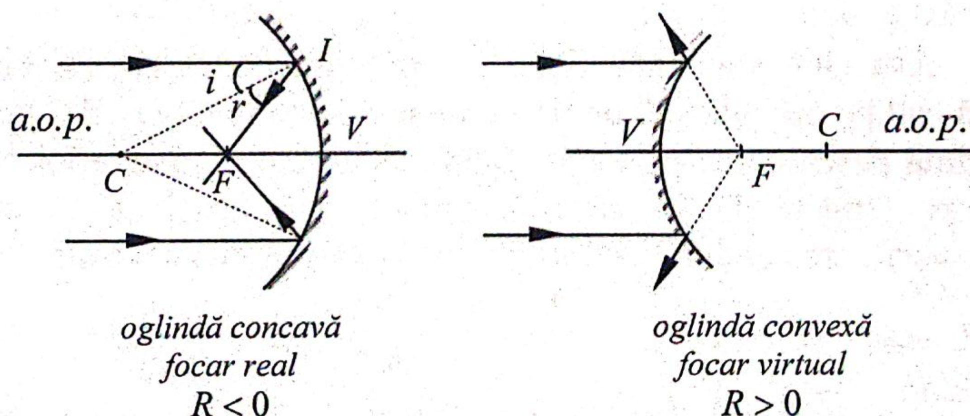


Figura 2.7. Stabilirea poziţiei focarului principal al oglinzii sferice

Este utilă menţionarea şi respectarea unei reguli de semne care corelează semnele distanţelor măsurate pe axa optică principală cu sensul în care se citesc acestea, pornind de la vârful oglinzii. Astfel, distanţele citite de la oglindă spre dreapta sunt pozitive, iar cele citite de la oglindă spre stânga sunt negative.

Pe verticală, distanţele citite de la axa optică în sus sunt considerate pozitive, iar cele citite de la axă în jos, sunt considerate negative.

Cu această regulă, oglinzile sferice din figura 2.7 pot fi caracterizate după cum urmează (tabelul 2.1):

Tabelul 2.1. Caracterizarea oglinzilor sferice

Nr. crt.	Denumirea oglinzii	Semnul razei	Semnul distanţei focale	Caracterizarea focarului	Tipul oglinzii
1	concavă	$R<0$	$f=\frac{R}{2}<0$	focar real	convergentă
2	convexă	$R>0$	$f=\frac{R}{2}>0$	focar virtual	divergentă

Dacă fascicolul paralel incident este înclinat faţă de axa optică principală (figura 2.8), focarul conjugat acestei direcţii se află în F', în planul perpendicular dus prin focarul principal F (*plan focal al oglinzii*).

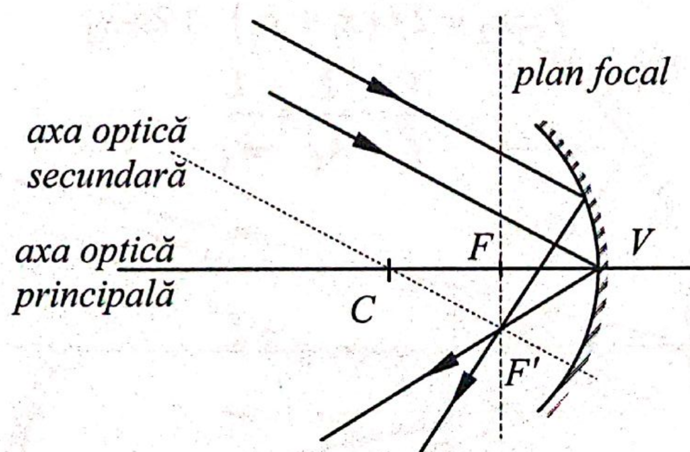


Figura 2.8. Stabilirea poziţiei focarelor secundare ale oglinzilor sferice

2.3.2. Formarea imaginilor

Fie un obiect liniar A_1B_1, situat în faţa unei oglinzi sferice concave, perpendicular pe axa optică principală. Imaginea A_2B_2 se obţine aplicând câteva reguli de construire a imaginilor prin oglinzi sferice (figura 2.9):

1. raza incidentă paralelă cu axa optică principală, după reflexie trece prin focar
2. raza incidentă care trece prin focar, după reflexie se propagă paralel cu axa optică principală
3. raza incidentă care trece prin centrul oglinzii, după reflexie se

propagă pe acelaşi drum, deci va trece tot prin centrul oglinzii

Cu notaţiile din figura 2.9, ţinând cont că $\Delta A_1B_1C \sim \Delta A_2B_2C$, se poate scrie:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{A_1C}{A_2C}=\frac{-x_1-(-2f)}{-2f-(-x_2)}=\frac{-x_1+2f}{-2f+x_2}$$

Dar şi $\Delta A_1B_1V \sim \Delta A_2B_2V$:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{VA_1}{VA_2}=\frac{-x_1}{-x_2}$$

şi rezultă astfel că:

$$\frac{x_1-2f}{2f-x_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

$$2x_1x_2=2f(x_1+x_2) \quad |:2x_1x_2$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_1}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_2}}$$

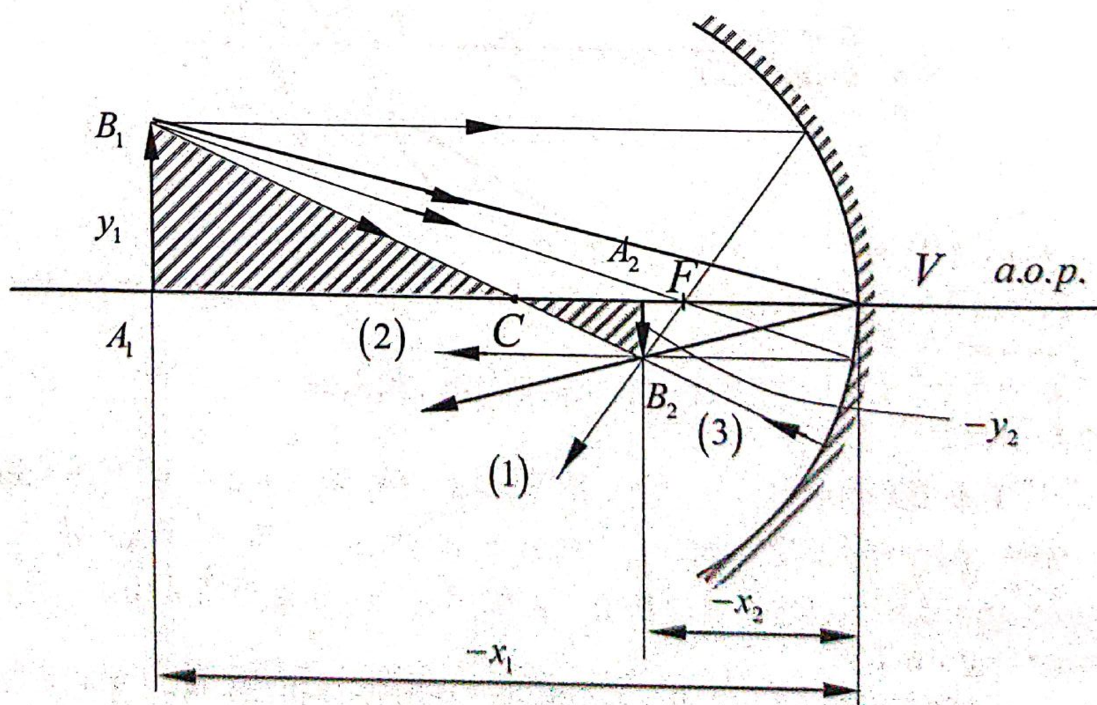


Figura 2.9. Formarea imaginii unui obiect perpendicular pe axa optică principală într-o oglindă sferică concavă şi ilustrarea regulilor de formare a imaginilor în oglinzi sferice

Relaţia de mai sus poartă numele de ***formula oglinzilor sferice*** (ecuaţia punctelor conjugate). Se observă că s-a obţinut prin calcul direct un rezultat anticipat deja, prin compararea formei ecuaţiilor sagitală şi tangenţială în cazul fasciculelor înguste.

Dacă se consideră focarul F drept origine a segmentelor care definesc poziţia obiectului şi a imaginii (figura 2.10), distanţele nu se mai supun regulii de semne enunţate anterior, iar calculele de mai sus se fac astfel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_1B_1C \sim \Delta A_2B_2C \;&\Rightarrow\; \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C}{A_2C} = \frac{p_1 - f}{f - p_2} \\ \Delta A_1B_1V \sim \Delta A_2B_2V \;&\Rightarrow\; \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{VA_1}{VA_2} = \frac{p_1 + f}{f + p_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p_1 - f}{f - p_2} = \frac{p_1 + f}{f + p_2}$$

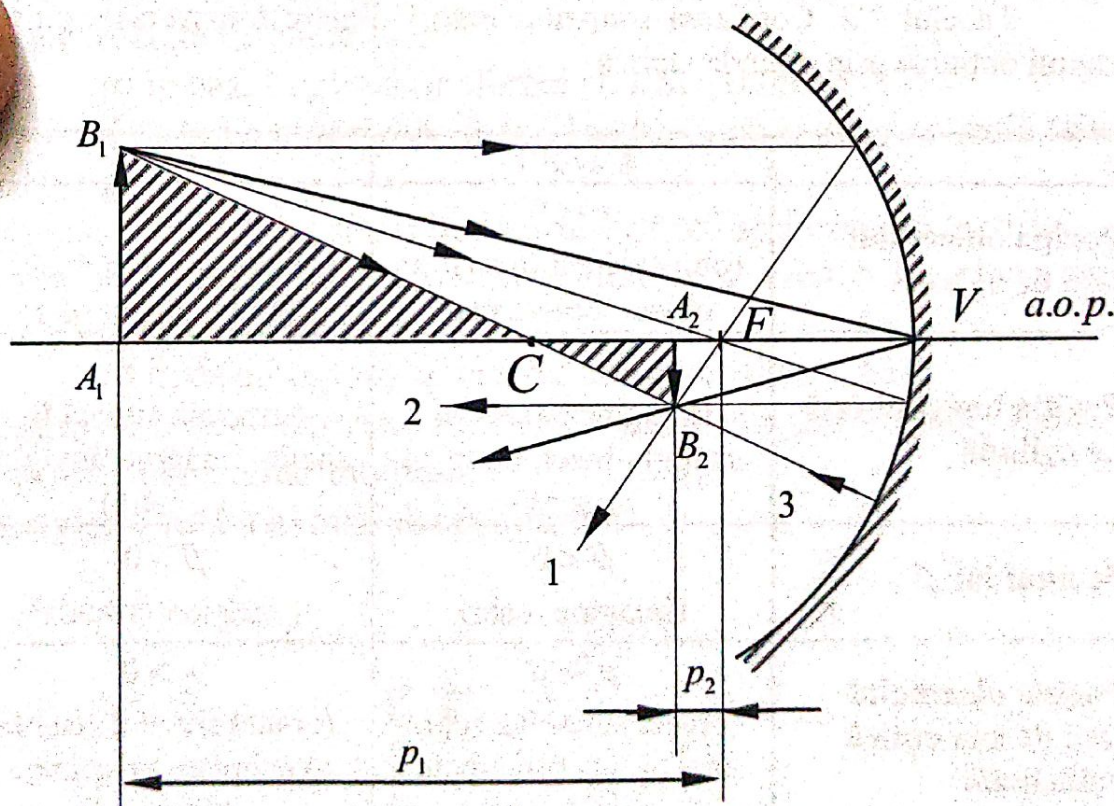


Figura 2.10. Formarea imaginii unui obiect perpendicular pe axa optică principală într-o oglindă sferică concavă.
Deducerea ecuaţiei lui Newton

$$\cancel{p_1 f} + p_1 p_2 - f^2 - \cancel{f p_2} = \cancel{f p_1} + f^2 - p_1 p_2 - \cancel{p_2 f}$$

de unde rezultă:

$$f^2 = p_1 p_2$$

adică *ecuaţia lui Newton.*

Raportul dintre mărimea imaginii şi mărimea obiectului se numeşte *mărirea liniară*. Cu notaţiile din figura 2.9, conform celui de al doilea raport de asemănare:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{VA_1}{VA_2} = \frac{-x_1}{-x_2} \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2} = \frac{-x_1}{-x_2}$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Corelaţia dintre semnul măririi liniare transversale şi tipul imaginii obţinute prin oglinda sferică poate fi observată în tabelul 2.2:

Tabelul 2.2. Corelarea semnului măririi liniare transversale cu tipul imaginii obţinute prin oglinda sferică

	Cazul 1	**Cazul 2**
Poziţia obiectului faţă de oglindă	$x_1 < 0$ (obiect situat în spaţiul obiect, obiect real)	$x_1 < 0$ (obiect situat în spaţiul obiect, obiect real)
Poziţia imaginii faţă de oglindă	$x_2 < 0$ (imagine situată în spaţiul obiect, imagine reală)	$x_2 > 0$ (imagine situată în spaţiul imagine, imagine virtuală)
Semnul lui $\beta = -\frac{x_2}{x_1}$	$\beta < 0$ (imagine reală)	$\beta > 0$ (imagine virtuală)
Poziţia obiectului faţă de axa optică principală	$y_1 > 0$ (obiect situat deasupra axei optice principale, obiect real)	$y_1 > 0$ (obiect situat deasupra axei optice principale, obiect real)
Poziţia imaginii faţă de axa optică principală	$y_2 < 0$ (imagine situată sub axa optică principală, imagine reală)	$y_2 > 0$ (imagine situată sub axa optică principală, imagine virtuală)
Semnul lui $\beta = \frac{y_2}{y_1}$	$\beta < 0$ (imagine reală)	$\beta > 0$ (imagine virtuală)
Tipul imaginii	imagine reală	imagine virtuală

Observaţii

1. Folosind relaţiile oglinzilor sferice în care se face trecerea la limită: $R \to \infty$ (oglinzi plane !), se obţine:

$$R \to \infty \Rightarrow f \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

ceea ce arată că obiectul şi imaginea acestuia în oglinda plană sunt situate de o parte şi de alta a oglinzii, la egală depărtare de aceasta. În plus, unui obiect real ($x_1 < 0$) îi corespunde o imagine virtuală ($x_2 > 0$), iar unui obiect virtual ($x_1 > 0$) îi corespunde o imagine reală ($x_2 < 0$); cu alte cuvinte, imaginea dată de o oglindă plană nu poate fi de aceeaşi natură cu obiectul.

2. Folosind regulile de construire a imaginilor în oglinzile sferice, rezultă următoarele:

a) în cazul oglinzilor sferice concave (tabelul 2.3):

- obiectele situate dincolo de focarul oglinzii au o imagine reală (situată în faţa oglinzii)
- imaginea obiectului situat în focarul oglinzii se formează la infinit
- obiectele situate între focar şi oglindă vor avea o imagine virtuală (situată în spatele oglinzii)

b) în cazul oglinzilor sferice convexe (figura 2.11)

- oglinzile sferice convexe formează numai imagini virtuale, indiferent de poziţia obiectului luminos
- imaginile sunt mai mici decât obiectul

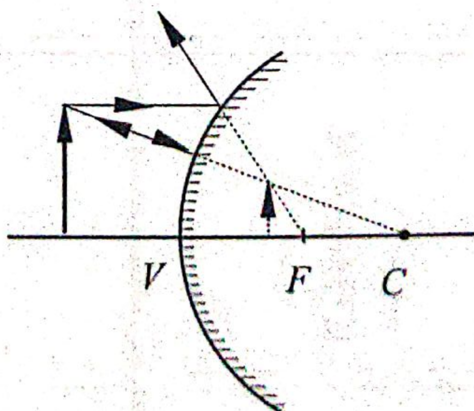


Figura 2.11. Formarea imaginilor în oglinda sferică convexă

Tabelul 2.3. Formarea imaginilor în oglinda sferică concavă

Nr. crt.	Poziția obiectului	Formarea imaginii	Caracterizarea imaginii
1	- la infinit	a.o.p. F C V	- reală - punctiformă (se obține focarul oglinzii)
2	- dincolo de centrul de curbură	a.o.p. F C V	- reală - răsturnată - mai mică decât obiectul

3	- în centrul de curbură		- reală - răsturnată - egală ca mărime cu obiectul
4	- între focar şi centru		- reală - răsturnată - mai mare decât obiectul

5	- în focar		- reală - formată la infinit - mărime infinită
6	- între oglindă și focar		- virtuală - dreaptă - mai mare decât obiectul

2.4. Oglinzi plane

Se numeşte *oglindă plană* o suprafaţă plană foarte netedă (de obicei metalică sau metalizată), care reflectă aproape integral lumina care cade pe ea (figura 2.12).

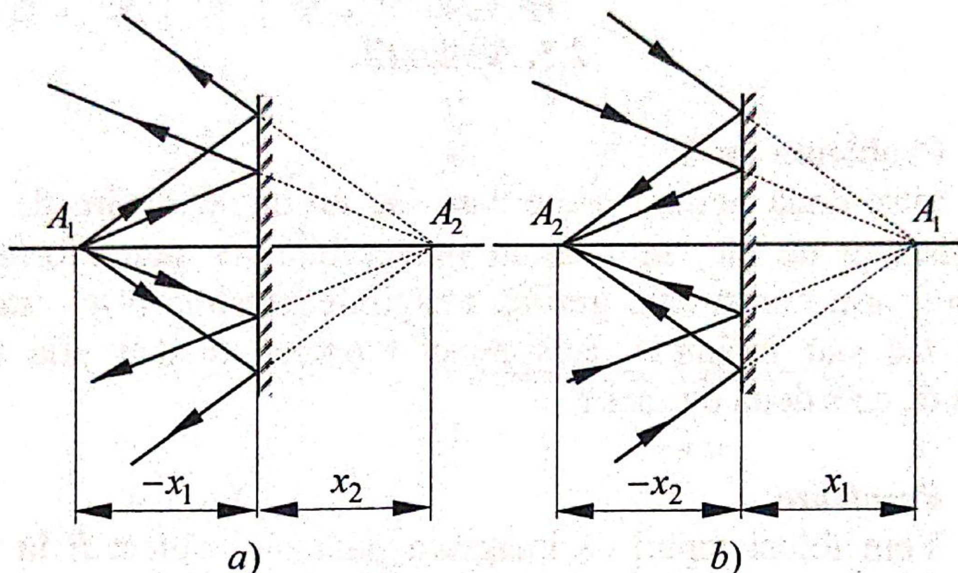


Figura 2.12. Formarea imaginilor în oglinda plană

Urmărind mersul razelor de lumină, conform legilor reflexiei, se observă că obiectul real A_1 are o imagine virtuală A_2 în oglinda plană (figura 2.12.*a*), în timp ce obiectul virtual are o imagine reală (figura 2.12.*b*), aşa cum s-a văzut deja, prin particularizarea relaţiei punctelor conjugate a oglinzilor sferice la $R \to \infty$.

Dacă se ţine cont de relaţia $x_2 = -x_1$, mărirea liniară transversală a oglinzilor plane devine:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{-x_1}{x_1} = 1 \Rightarrow y_2 = y_1$$

adică imaginea este egală cu obiectul

În concluzie:

- imaginea A_2 a unui punct A_1 se obţine la intersecţia razelor reflectate de oglindă care au pornit din A_1 (sau la prelungirea acestora)
- intersecţia poate fi reală sau virtuală, după cum fascicolul reflectat este convergent sau divergent
- oglinda plană este riguros stigmatică

- imaginea unui obiect luminos este simetrica obiectului față de oglindă, dar simetria este specială:
    - imaginea este egală cu obiectul
    - imaginea nu poate fi suprapusă peste obiect prin nici o operație geometrică de translație sau rotație

2.5. Aplicații

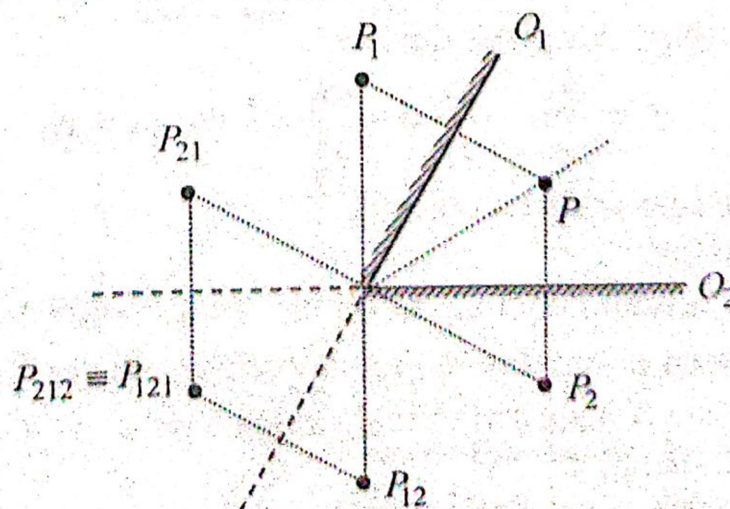
Problema nr. 1.

Între două oglinzi plane care fac un unghi diedru de $60°$, la egală distanță de ele, se află un obiect luminos punctiform. Să se determine prin construcție grafică imaginile acestuia prin sistemul de oglinzi. Ce s-ar întâmpla dacă punctul obiect nu s-ar afla la egală distanță de cele două oglinzi ?

Rezolvare

Vom folosi faptul că imaginea punctului obiect P în una din oglinzi devine obiect pentru cealaltă oglindă. Astfel:

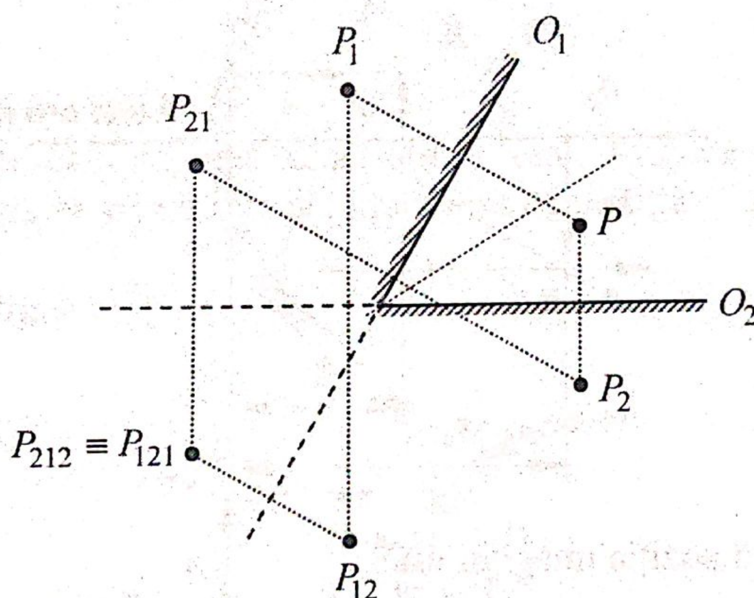
- P_1 este imaginea punctului P în oglinda O_1
- imaginea lui P_1 în oglinda O_2 este P_{12}
- imaginea lui P_{12} este P_{121}
- P_2 este imaginea punctului P în oglinda O_2
- imaginea lui P_2 în oglinda O_1 este P_{21}
- imaginea lui P_{21} este P_{121}



Prin urmare, se formează 5 imagini ale obiectului P. Rezultatul ascultă de relaţia:

$$\frac{360^\circ}{\alpha}-1=\frac{360^\circ}{60^\circ}-1=5$$

În cazul în care poziţia punctului obiect ar fi alta decât în cazul descris mai sus, situaţia ar fi următoarea:



Deoarece principiul de formare a imaginilor prin sistemul de oglinzi considerat este acelaşi, răspunsul este că nu se întâmplă nimic deosebit! Dacă unghiul diedru format de oglinzi este de 60°, se formează cinci imagini, indiferent de poziţia obiectului situat, desigur, între oglinzi ...

Problema nr. 2.

Stabiliţi în ce condiţii imaginea unui obiect real printr-o oglindă sferică concavă este de două ori mai mare decât obiectul.

Rezolvare

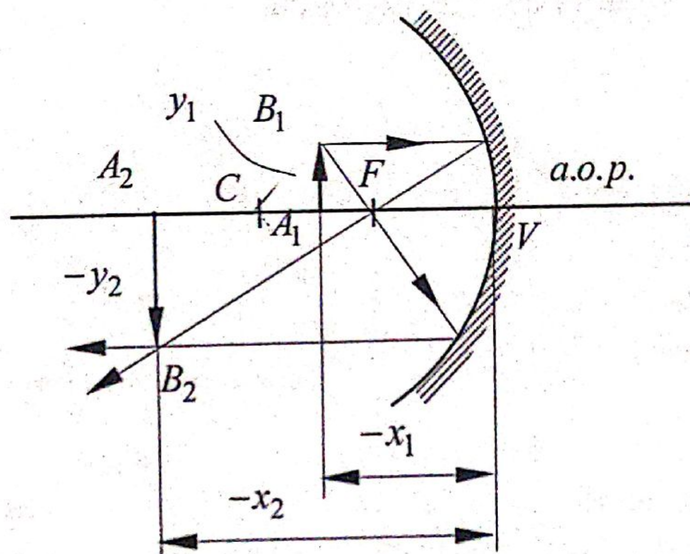
- în cazul în care imaginea se consideră reală, se poate scrie:

$$\beta=\frac{y_2}{y_1}=-\frac{x_2}{x_1}=-2 \Rightarrow x_2=2x_1$$

- folosind ecuaţia punctelor conjugate, rezultă:

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2x_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{3}{2x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_1=\frac{3f}{2}=f+\frac{1}{2}f(<0)$$

adică obiectul trebuie să fie situat la jumătatea distanţei dintre centrul şi focarul oglinzii:

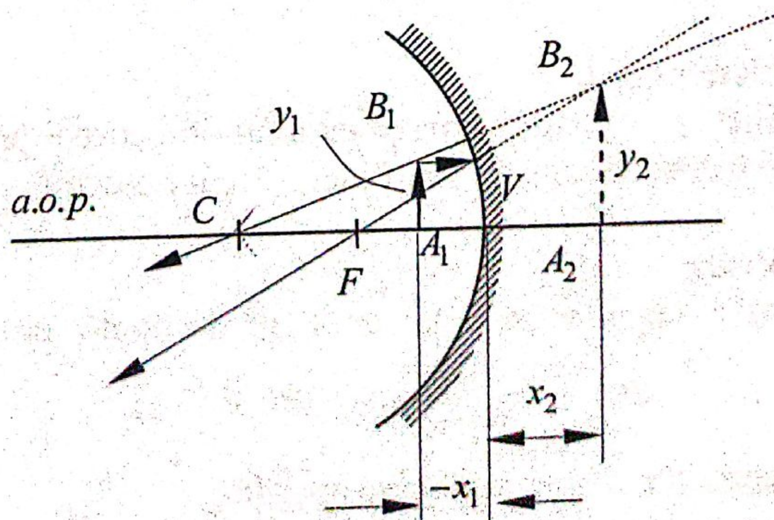


- se observă că poziţia imaginii este:

$$x_2=2\cdot\frac{3f}{2}=3f$$

- în cazul unei imagini virtuale:

$$\beta=\frac{y_2}{y_1}=-\frac{x_2}{x_1}=2 \Rightarrow x_2=-2x_1$$



$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{-2x_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_1=\frac{f}{2}=(<f,<0)$$

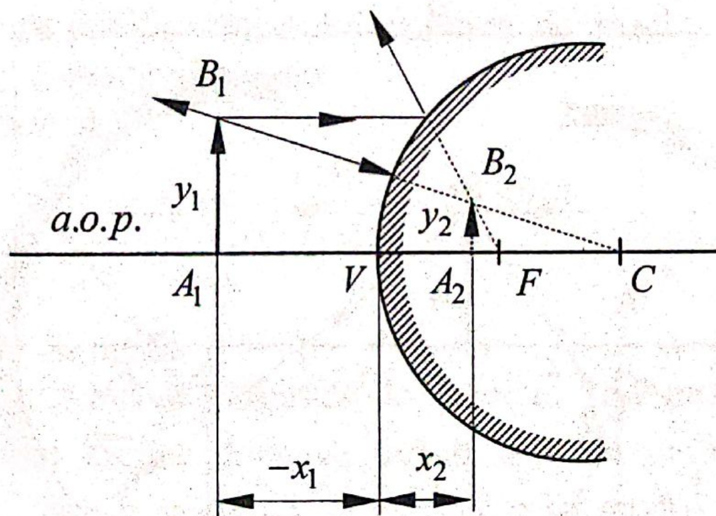
adică obiectul trebuie să fie situat în faţa oglinzii, la o distanţă egală cu jumătatea distanţei focale (faţă de vârf)
- poziţia imaginii este:

$$x_2=-2\cdot\frac{f}{2}=-f(>0)$$

Problema nr. 3.

Arătaţi că imaginea unui obiect real, formată de o oglindă sferică convexă, nu poate fi reală, indiferent de poziţia obiectului.

Rezolvare



- din ecuaţia punctelor conjugate se obţine:

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{x_1-f}$$

- oglinda fiind convexă, $f>0$ (distanţa focală se măsoară de la vârf spre dreapta)
- obiectul fiind real, el este situat în spaţiul obiect, deci $x_1<0$
- rezultă astfel:

$$\left.\begin{matrix} fx_1<0 \\ x_1-f<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2>0$$

deci imaginea se formează în spatele oglinzii, fiind astfel virtuală

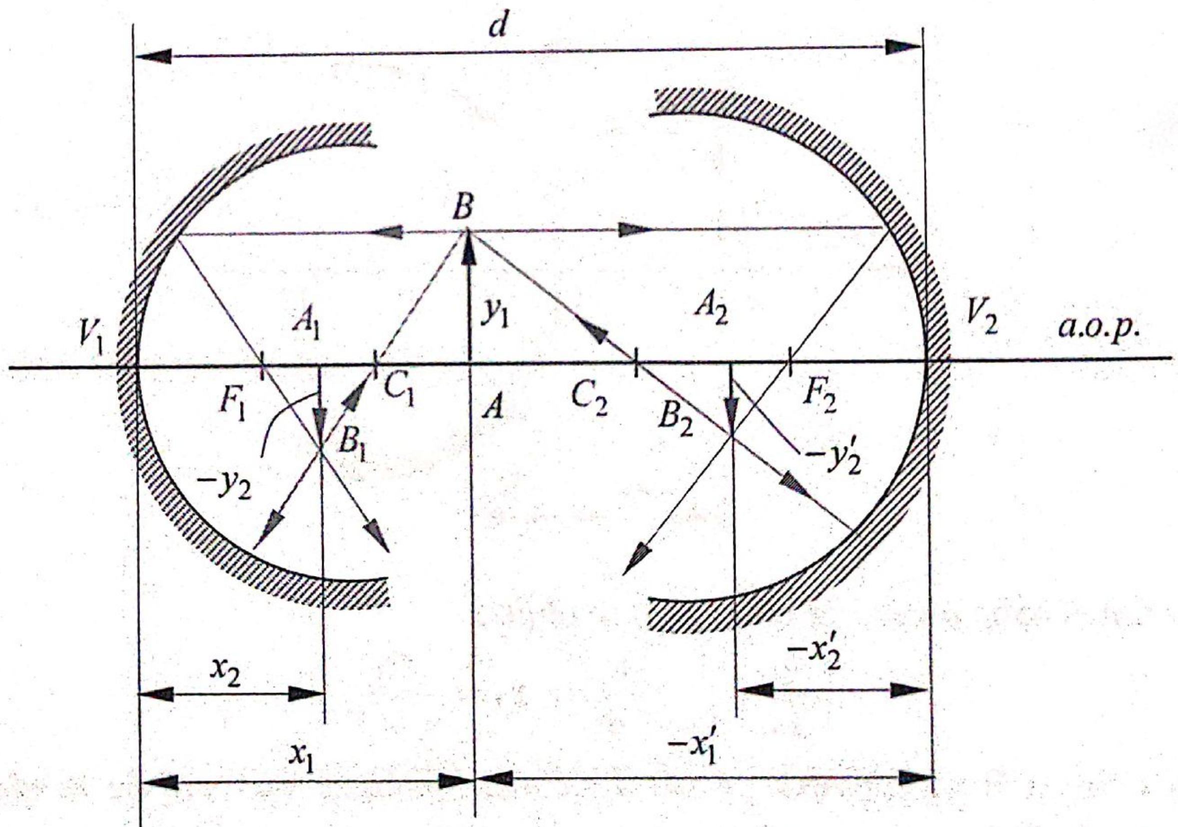
(indiferent de poziţia x_1 a obiectului)

Problema nr. 4.

Un obiect este plasat între două oglinzi sferice, perpendicular pe axa optică principală, comună, a acestora. Cunoscând că ambele oglinzi sunt convergente, stabiliţi poziţia exactă a obiectului, pentru ca imaginile sale în cele două oglinzi să aibă aceeaşi mărime. Aplicaţie numerică: $R_1 = 20\,cm$, $R_2 = 25\,cm$, $d = 60\,cm$.

Rezolvare

- se va determina distanţa x_1 dintre prima oglindă şi obiect
- imaginea dată de prima oglindă se caracterizează astfel:



$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R_1} \Rightarrow x_2 = \frac{R_1 x_1}{2x_1 - R_1}$$

$$(\beta_1 =) - \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = -y_1 \frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_1 R_1}{2x_1 - R_1}$$

- pentru imaginea formată de a doua oglindă se poate scrie:

$$\frac{1}{x_2'}+\frac{1}{x_1'}=\frac{2}{R_2} \Rightarrow x_2'=\frac{R_2 x_1'}{2x_1'-R_2}$$

$$(\beta_2=)-\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{y_2'}{y_1} \Rightarrow y_2'=-y_1\frac{x_2'}{x_1'}=-\frac{y_1 R_2}{2x_1'-R_2}$$

- se pune condiţia ca cele două imagini să aibă aceeaşi mărime:

$$y_2=y_2' \Rightarrow \frac{R_1}{2x_1-R_1}=\frac{R_2}{2x_1'-R_2}$$

- legătura dintre x_1 şi x_1' este dată de distanţa dintre cele două oglinzi:

$$d=x_1-x_1' \Rightarrow x_1'=x_1-d$$

de unde rezultă:

$$x_1=\frac{R_1 d}{R_1-R_2}$$

- se observă că poziţia obiectului depinde de razele de curbură ale oglinzilor şi de distanţa dintre ele
- aplicaţie numerică:

$$x_1=\frac{20\cdot 60}{20-(-25)}=26,67\,cm$$

Problema nr. 5.

Un obiect având înălţimea de $2\,cm$ se află situat la $25\,cm$ în faţa unei oglinzi sferice concave având raza de curbură de $15\,cm$. Caracterizaţi imaginea obţinută. Arătaţi cum se modifică dimensiunea imaginii dacă obiectul se îndepărtează de oglindă cu $5\,cm$. Dar dacă se apropie de aceasta cu $10\,cm$?

Rezolvare

- se poate determina poziţia imaginii:

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{R} \Rightarrow x_2=\frac{Rx_1}{2x_1-R}=\frac{(-15)\cdot(-25)}{2\cdot(-25)-(-15)}=-10,71\,cm(<0)$$

deci imaginea se formează în faţa oglinzii; ea este reală
- se determină mărimea obiectului:

$$\beta=-\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2=-y_1\frac{x_2}{x_1}=-2\cdot\frac{3}{7}=-0,86\,cm(<0)$$

deci imaginea este răsturnată; ea este reală
- dacă obiectul se îndepărtează de oglindă cu $5\,cm$, noua sa poziţie va fi:

$$x_1' = x_1 + \Delta x_1 = -25 - 5 = -30\,cm$$

- poziţia noii imagini va fi:

$$\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_1'} = \frac{2}{R} \Rightarrow x_2' = \frac{Rx_1'}{2x_1' - R} = \frac{(-15)\cdot(-30)}{2\cdot(-30)-(-15)} = -10\,cm(<0)$$

- îndepărtând obiectul de oglindă, imaginea (reală) se apropie de aceasta
- mărimea imaginii:

$$y_2' = -y_1\frac{x_2'}{x_1'} = -2\frac{-10}{-30} = -0{,}66\,cm(<0)$$

- imaginea rămâne răsturnată, deci reală, dar scade ca mărime
- dacă obiectul se apropie de oglindă, poziţia sa va fi caracterizată de:

$$x_1'' = x_1 + \Delta x_1' = -25 + 10 = -15\,cm$$

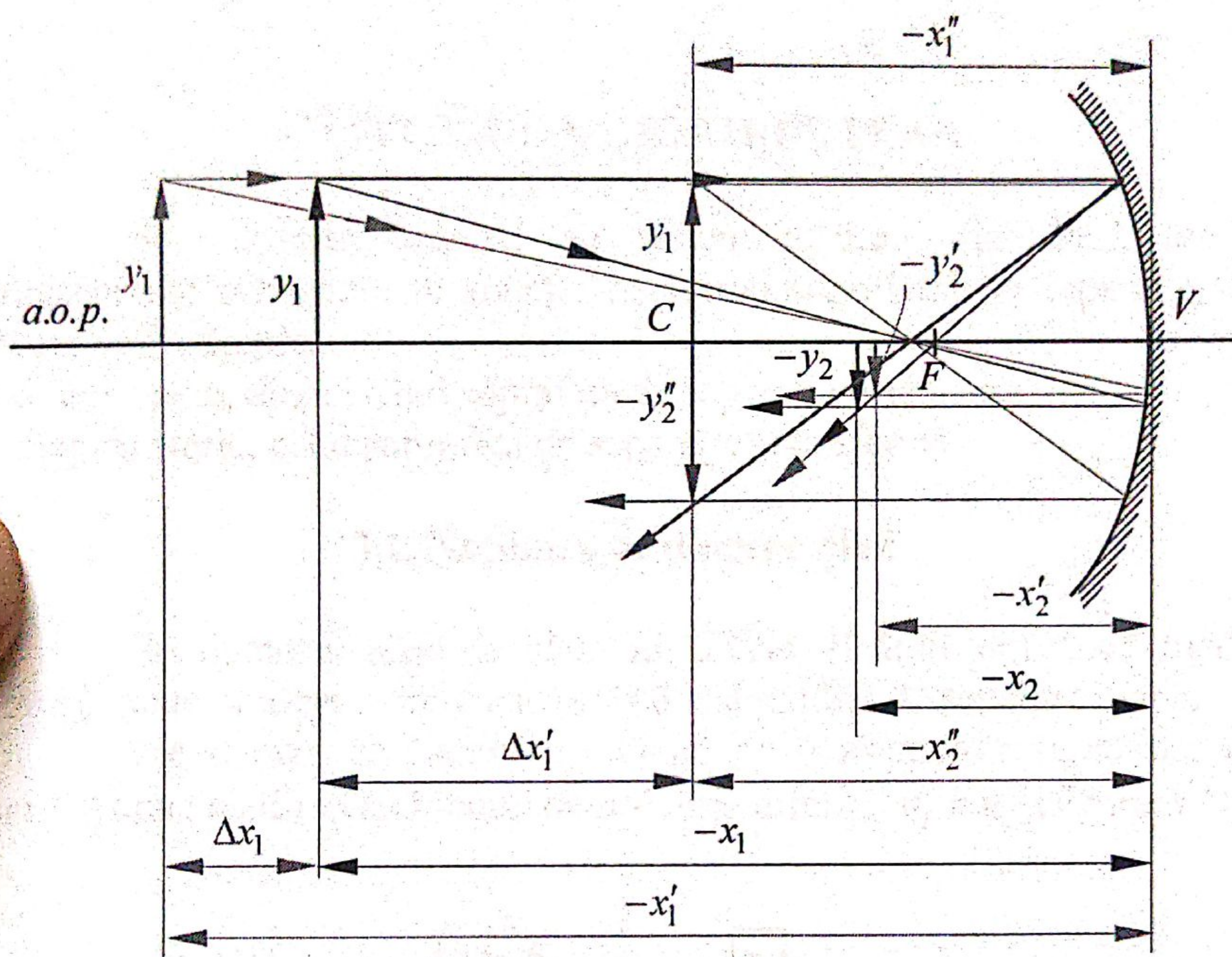
- poziţia imaginii devine:

$$x_2'' = \frac{Rx_1''}{2x_1'' - R} = \frac{(-15)\cdot(-15)}{2\cdot(-15)-(-15)} = -15\,cm(<0)$$

- imaginea rămâne în continuare reală, dar se îndepărtează de oglindă
- se observă că în noua sa poziţie, obiectul se află chiar în centrul oglinzii (se mai spune că se află la dublul distanţei focale), caz în care imaginea se formează în acelaşi loc (deci tot la dublul distanţei focale faţă de oglindă)
- ne aşteptăm ca imaginea să aibă aceeaşi mărime cu obiectul:

$$y_2'' = -y_1\frac{x_2''}{x_1''} = -2\frac{-15}{-15} = -2\,cm(<0)$$

- situaţiile discutate sunt prezentate în figura de mai jos:


$-x_1''$
y_1
y_1
y_1
$-y_2'$
a.o.p.
C
V
$-y_2$
F
$-y_2''$
$-x_2'$
$-x_2$
$\Delta x_1'$
$-x_2''$
Δx_1
$-x_1$
$-x_1'$

CAPITOLUL 3. DIOPTRUL PLAN

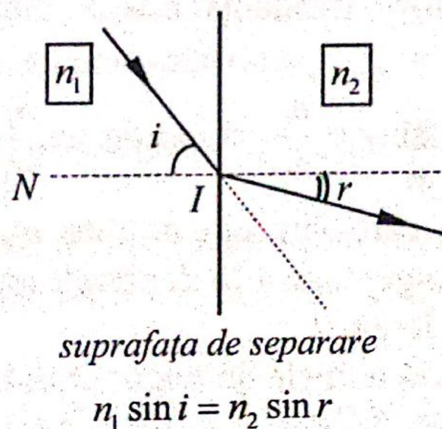
Se numeşte *dioptru* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene. În funcţie de forma suprafeţei de separaţie, se poate vorbi despre:

- dioptru plan, atunci când suprafaţa de separaţie este plană
- dioptru sferic, când suprafaţa de separaţie este sferică

3.1. Noţiunea de dioptru plan

Se numeşte *dioptru plan* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene, între care există o suprafaţă de separare plană.

Fie o rază de lumină incidentă pe o asemenea suprafaţă, ce separă două medii având indici de refracţie diferiţi, $n_1 \neq n_2$ (figura 3.1).



suprafaţa de separare

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

Figura 3.1. Refracţia luminii prin dioptrul plan

Se întâlnesc următoarele situaţii:

a) $n_2 > n_1$

Mediul din care vine raza este mai puţin refringent decât al doilea mediu ($i \in (0°, 90°)$); se poate scrie:

$$n_2 > n_1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} < 1$$

Folosind legea a doua a refracţiei, raportul $\frac{n_1}{n_2}$ se scrie:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i} < 1$$

de unde rezultă:

$$\sin r < \sin i \overset{i \in (0°, 90°)}{\Leftrightarrow} r < i$$

deci în al doilea mediu, raza de lumină se apropie de normală.

Observaţii

1. Dacă $i = 0°$, raza incidentă vine de-a lungul normalei NI şi se spune că *incidenţa este normală*. Conform legii a doua a refracţiei, unghiul de refracţie va fi nul, $r = 0°$, iar razele incidentă şi refractată vor fi în prelungire

2. Dacă $i = 90°$, incidenţa este *razantă*, iar legea a doua a refracţiei se scrie:

$$n_1 \underbrace{\sin 90°}_{=1} = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow r = \arcsin \frac{n_1}{n_2} = \arcsin \frac{1}{n_{21}} = l \left(= r_{max}\right)$$

şi astfel, toate razele care vin sub diferite unghiuri de incidenţă din mediul mai puţin refringent, se află după refracţie în interiorul unui con de revoluţie cu deschiderea $2l$.

Unghiul l poartă numele de *unghi limită*.

b) $\boldsymbol{n_2 < n_1}$

Mediul din care vine raza este mai refringent decât al doilea mediu ($i \in (0°, 90°)$) şi, folosind legea a doua a refracţiei, se poate scrie:

$$n_2 < n_1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} > 1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i} > 1 \Rightarrow \sin r > \sin i \overset{i \in (0°, 90°)}{\Leftrightarrow} r > i$$

deci raza emergentă se depărtează de normală (figura 3.2, razele 1, 2 şi 3).

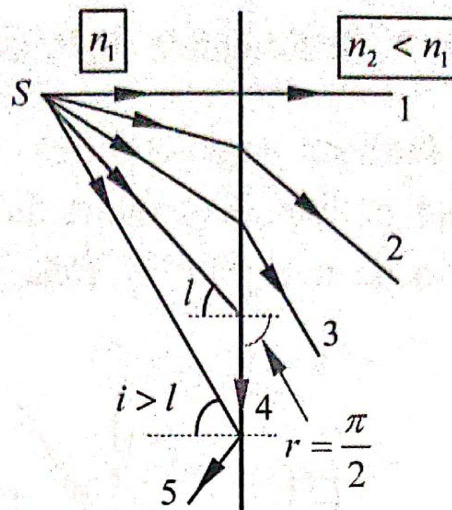


Figura 3.2. Reflexia totală

Observaţie:

Lumina trece dintr-un mediu optic mai dens într-unul mai puţin dens, deci unghiul de refracţie este mai mare decât cel de incidenţă; valoarea sa maximă este $r_{max} = 90°$, ceea ce înseamnă că există un unghi de incidenţă maxim, corespunzător, $i_{max} = l$ (figura 3.2, raza 4).

$$n_1 \sin l = n_2 \sin 90° \Rightarrow \sin l = \frac{n_2}{n_1}(<1)$$

Dacă unghiul de incidenţă este mai mare decât unghiul limită ($i > l$, figura 3.2, raza 5), lui îi va corespunde un unghi de refracţie r' şi se poate scrie:

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1}\sin r' > \sin l = \frac{n_2}{n_1}\sin 90° \Rightarrow r' > 90°$$

Rezultă că, dacă unghiul de incidenţă este mai mare decât unghiul limită, raza incidentă nu mai trece în mediul al doilea, ci se *reflectă total*.

3.2. Formarea imaginilor în dioptrul plan

În cele ce urmează, se va studia formarea imaginilor în dioptrul plan, în condiţiile unor fasciculele incidente largi.

3.2.1. Imaginea sagitală

Fie o sursă luminoasă punctiformă S_1. Toate razele care pornesc din S_1 şi cad pe suprafaţa dioptrului sub acelaşi unghi de incidenţă i, după refracţie trec prin S_2 (*imaginea sagitală a lui* S_1, figura 3.3).

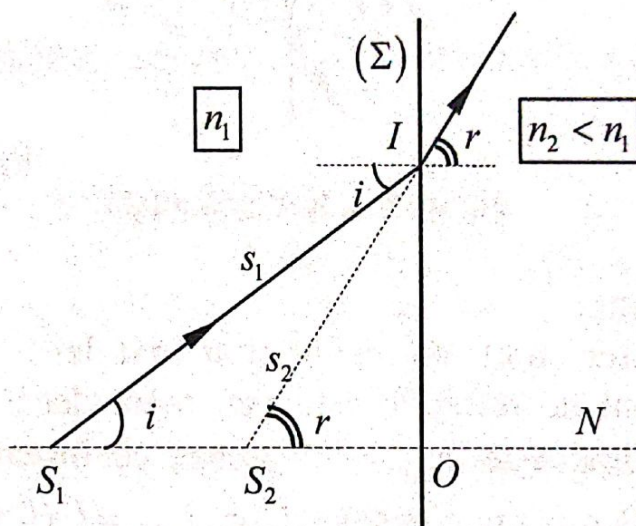


Figura 3.3. Formarea imaginii sagitale în dioptrul plan

Dacă unghiul de incidenţă se modifică, imaginea S_2 se va forma în alt loc, dar rămâne pe normala S_1N (vezi figura 3.4).

Din triunghiurile ΔS_1IO şi ΔS_2IO rezultă:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta S_1IO:\ IO = S_1O\cdot \text{tg}\, i\\ \Delta S_2IO:\ IO = S_2O\cdot \text{tg}\, r\end{array}\right\} \Rightarrow S_1O\cdot \text{tg}\, i = S_2O\cdot \text{tg}\, r \Rightarrow S_2O = \frac{\text{tg}\, i}{\text{tg}\, r} S_1O$$

Pentru ca imaginea S_2 să rămână fixă când variază incidenţa, trebuie ca S_2O să fie constant.

Dar, conform legii refracţiei, este constant numai raportul sinusurilor, raportul tangentelor fiind variabil; prin urmare, în general, poziţia lui S_2 se modifică.

Prezintă interes următoarele situaţii:

- $S_1O = 0 \Rightarrow S_2O = 0$, $(\forall)\, i$, deci dioptrul plan este stigmatic pentru punctele de pe suprafaţa sa

- $S_1O=\infty \Rightarrow S_2O=\infty$, $(\forall)\, i$, deci dioptrul plan este stigmatic pentru punctele de la infinit

Se poate vorbi astfel despre stigmatism aproximativ pentru unghiuri de incidenţă mici, când $\sin i \approx \operatorname{tg} i$ (adică razele cad aproape perpendicular pe suprafaţa de separare).

Se notează:

$$IS_1 = s_1;\ IS_2 = s_2$$

şi se poate scrie:

$$IO = s_1 \sin i = s_2 \sin r$$

Folosind legea refracţiei:

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin r$$

rezultă:

$$s_1 \frac{n_2}{n_1} \sin r = s_2 \sin r \Rightarrow \frac{s_1}{n_1} = \frac{s_2}{n_2}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\boldsymbol{\frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_2} = 0}$$

adică *ecuaţia imaginii sagitale a dioptrului plan.*

Observaţii

1. În condiţiile în care raza de lumină suferă reflexie totală pe dioptru, lumina se întoarce în mediul din care a venit, ceea ce se poate scrie:

$$n_2 = -n_1$$

Această relaţie este echivalentă de fapt cu o condiţie de reflexie, dioptrul plan comportându-se ca o oglindă plană; în acest caz, ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0 \Rightarrow s_1 = -s_2$$

rezultat cunoscut de la studiul oglinzilor plane.

2. Ecuaţia imaginii sagitale a dioptrului plan se poate obţine din ecuaţia imaginii sagitale a dioptrului sferic, punând condiţia ca raza de

curbură a acestuia să fie infinită (condiţia de obţinere a unui dioptru plan).

3.2.2. Imaginea tangenţială

Se consideră sursa punctiformă S de la care porneşte raza SI_1; conform figurii, după refracţie, ea va forma imaginea virtuală S_1. Dacă unghiul de incidenţă se modifică (fie acesta i_2), imaginea se va forma în alt loc, S_2 (figura 3.4).

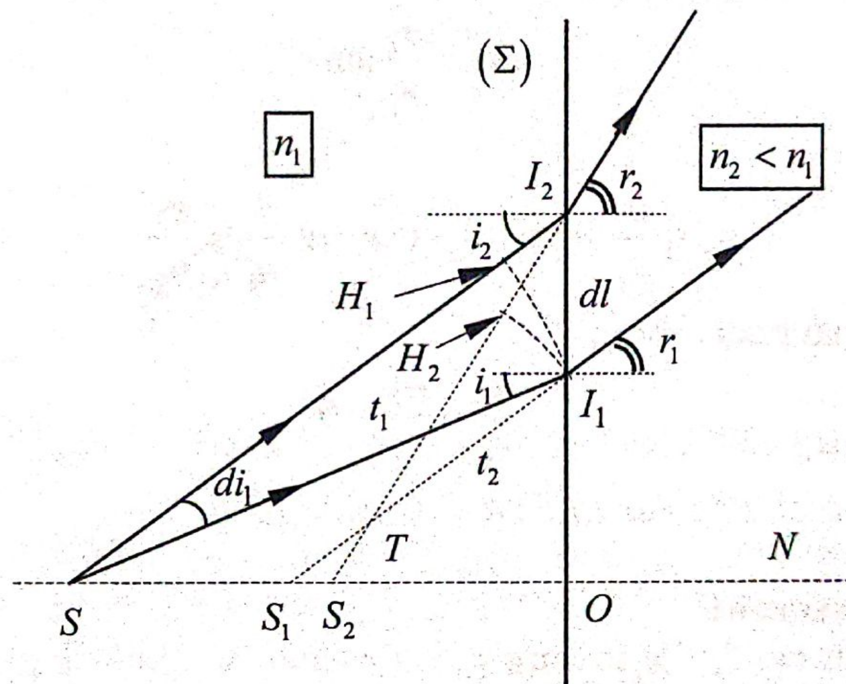


Figura 3.4. Formarea imaginii tangenţiale în dioptrul plan

Imaginea tangenţială se obţine grupând razele după secţiuni plane care trec prin SO. Se notează cu T intersecţia prelungirilor razelor S_1I_1 şi S_2I_1 (figura 3.4) şi se vor folosi notaţiile:

$$SI_1 = t_1;\ TI_1 = t_2;\ I_1I_2 = dl$$

Se scrie legea refracţiei şi apoi se va diferenţia:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_1$$

$$n_1 \cos i_1 di_1 = n_2 \cos r_1 dr_1$$

Se construieşte un cerc cu centrul în S şi cu raza egală cu SI_1; acesta va intersecta SI_2 în punctul H_1, obţinându-se astfel triunghiul isoscel ΔSI_1H_1, cu un unghi di_1 foarte mic (figura 3.5).

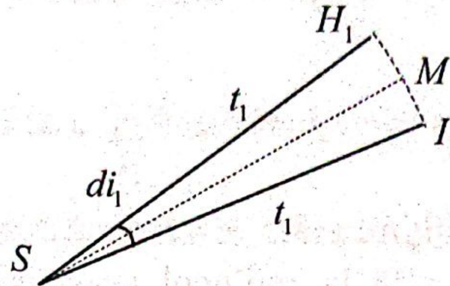


Figura 3.5. Construcţie ajutătoare pentru determinarea lui di_1

Se construieşte înălţimea SM corespunzătoare laturii necongruente I_1H_1 (punctul M se află la mijlocul acesteia) şi se obţine triunghiul dreptunghic ΔSI_1M în care[7]:

$$\sin\frac{di_1}{2}=\frac{I_1M}{SI_1}=\frac{\frac{I_1H_1}{2}}{SI_1} \Rightarrow di_1=\frac{I_1H_1}{t_1}$$

Lungimea segmentului I_1H_1 se determină din triunghiul $\Delta I_1I_2H_1$, dreptunghic în H_1, în care $\widehat{H_1I_1I_2}=i_1$:

$$\cos i_1=\frac{I_1H_1}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_1=I_1I_2\cos i_1 \Rightarrow I_1H_1=dl\cos i_1$$

de unde rezultă:

$$di_1=\frac{dl\cos i_1}{t_1}$$

Analog, se determină dr_1, construind un cerc cu centrul în punctul T şi de rază t_2; acesta va intersecta segmentul TI_2 în punctul H_2. Se obţine astfel triunghiul isoscel ΔTI_1H_2, cu laturile congruente egale cu t_2 şi cu unghiul dr_1 foarte mic (figura 3.6).

[7] Se ţine cont de aproximaţia unghiurilor mici (exprimate în radiani), pentru care $\sin i \approx i$

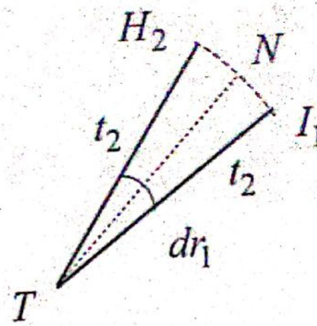


Figura 3.6. Construcţie ajutătoare pentru determinarea lui dr_1

Construind înălţimea TN corespunzătoare laturii necongruente I_1H_2 (punctul N se află la mijlocul acesteia), se obţine triunghiul dreptunghic ΔTI_1N în care[8]:

$$\sin\frac{dr_1}{2}=\frac{I_1N}{TI_1}=\frac{\frac{I_1H_2}{2}}{TI_1} \Rightarrow dr_1=\frac{I_1H_2}{t_2}$$

Lungimea segmentului I_1H_2 se determină din triunghiul $\Delta I_1I_2H_2$, dreptunghic în H_2, în care $\widehat{H_2I_1I_2}=r_1$:

$$\cos r_1=\frac{I_1H_2}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_2=I_1I_2\cos r_1 \Rightarrow I_1H_2=dl\cos r_1$$

de unde rezultă:

$$dr_1=\frac{dl\cos r_1}{t_2}$$

Cunoscând expresiile lui di_1 şi di_2, rezultă:

$$\frac{n_1 dl\cos^2 i_1}{t_1}=\frac{n_2 dl\cos^2 r_1}{t_2}$$

sau, împărţind relaţia de mai sus cu dl:

$$\boldsymbol{\frac{n_1\cos^2 i_1}{t_1}-\frac{n_2\cos^2 r_1}{t_2}=0}$$

Această relaţie poartă numele de *ecuaţia imaginii tangenţiale* (pentru dioptrul plan).

---

[8] Se ţine cont de aproximaţia unghiurilor mici (exprimate în radiani), pentru care $\sin i \approx i$

Observaţii

1. Se observă dependenţa $t_2 = t_2(i_1)$, deci dioptrul plan este un sistem astigmatic pentru fascicule largi

2. Dacă se pune condiţia de reflexie, $n_2 = -n_1$, ecuaţia imaginii tangenţiale devine:

$$\frac{\cos^2 i_1}{t_1} + \frac{\cos^2 r_1}{t_2} = 0$$

Fiind însă vorba de reflexie, între unghiurile i_1 şi r_1 va exista relaţia:

$$i_1 = -r_1$$

ceea ce înseamnă că se mai poate scrie:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 0 \Rightarrow t_1 = -t_2$$

rezultat caracteristic oglinzilor plane.

3. Pentru raze cvasinormale (i_1 foarte mic), se aproximează s_1 şi t_1 cu p_1, respectiv s_2 şi t_2 cu p_2 şi se obţine:

$$\frac{\boldsymbol{n_1}}{\boldsymbol{p_1}} - \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{p_2}} = \mathbf{0}$$

relaţie cunoscută sub numele de *ecuaţia dioptrului plan în aproximaţia Gauss*.

3.2.3. Construcţia grafică a razei refractate

Direcţia razei refractate în cazul unui dioptru plan poate fi determinată pe cale grafică astfel (figura 3.7):

- se desenează suprafaţa (Σ) de separare dintre cele două medii (având indicele de refracţie n_1, respectiv n_2)
- se trasează raza incidentă SI (în punctul de incidenţă I)
- se alege în planul figurii un punct O şi se construiesc cu centrul în acesta două cercuri cu raze proporţionale cu n_1, respectiv n_2

$$R_1 = \alpha n_1,\ R_2 = \alpha n_2$$

unde α este coeficientul de proporţionalitate

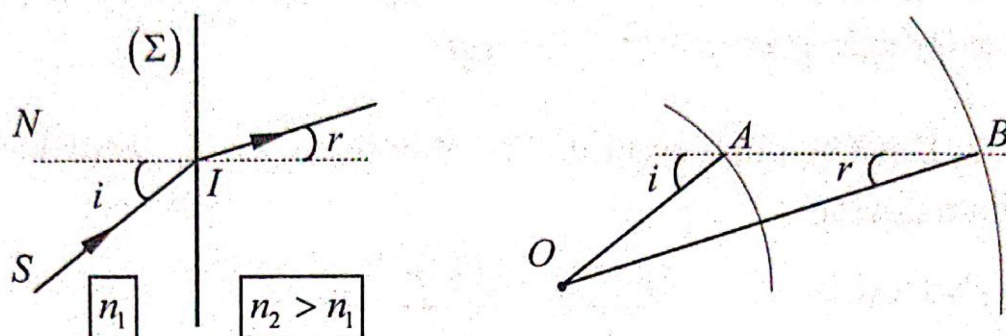


Figura 3.7. Construcţia razei refractate cu ajutorul principiului Huygens

- din punctul O se trasează o paralelă la raza SI; aceasta întâlneşte primul cerc în A
- din punctul A se trasează o paralelă la normala în punctul de incidenţă, care taie al doilea cerc în B
- se uneşte punctul O cu B şi se obţine direcţia razei refractate

Se scrie teorema sinusului în triunghiul OAB; se obţine:

$$\frac{OA}{\sin r}=\frac{OB}{\sin(\pi-i)}=\frac{AB}{\sin(i-r)}$$

Se reţine din această relaţia doar prima egalitate şi se ţine cont de faptul că razele OA şi OB ale celor două cercuri sunt, prin construcţie, proporţionale cu indicii de refracţie ai celor două medii. Rezultă:

$$\frac{\alpha n_1}{\sin r}=\frac{\alpha n_2}{\sin i} \Rightarrow \frac{n_1}{\sin r}=\frac{n_2}{\sin i}$$

adică legea refracţiei.

3.3. Asociaţii de dioptri plani

În cele ce urmează, vor fi discutate lama cu feţe plan-paralele şi prisma optică ca asociaţii simple de doi dioptri plani.

În ambele situaţii se consideră că acestea sunt mărginite de acelaşi mediu (aerul sau un mediu optic transparent, având indicele de refracţie n_1).

3.3.1. Lama cu fețe plan-paralele

Lama cu fețe plan-paralele este o asociație de doi dioptri plani paraleli, cuprinzând un mediu de indice de refracție n, mediile exterioare fiind identice.

Mersul razelor de lumină

Atunci când o rază de lumină monocromatică traversează o lamă cu fețe plan-paralele, ea își păstrează direcția inițială, dar apare o deplasare laterală (figura 3.8):

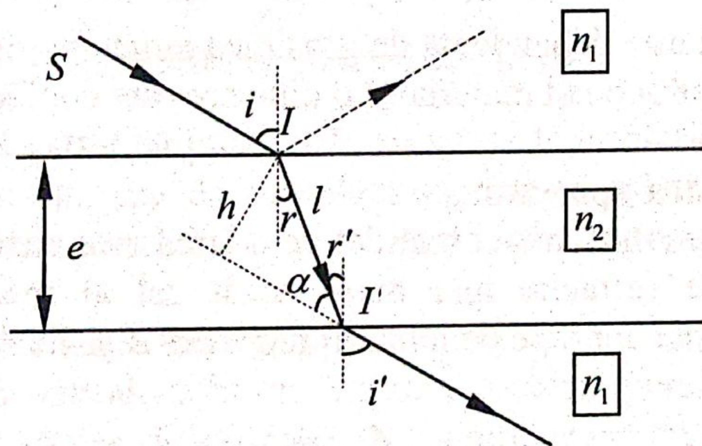


Figura 3.8. Mersul razelor de lumină prin lama cu fețe plan-paralele

Scriind legea refracției pentru cele două refracții succesive, pe cele două fețe ale lamei:

$$\left.\begin{array}{r} n_1 \sin i = n_2 \sin r \\ n_2 \sin r' = n_1 \sin i' \\ r' = r\left(\text{alterne interne}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow i = i'$$

adică raza emergentă este paralelă cu raza incidentă.

Deplasarea razei incidente

Raza emergentă este deplasată, deplasarea fiind h (figura 3.8):

$$\left.\begin{array}{r} \sin\alpha = \dfrac{h}{l} \Rightarrow h = l\sin\alpha \\ \alpha = i - r \end{array}\right\} \Rightarrow h = l\sin\left(i - r\right)$$

Din triunghiul $\Delta IMI'$ rezultă:

$$\cos r = \frac{e}{l} \Rightarrow l = \frac{e}{\cos r}$$

şi se obţine:

$$h = \frac{e\sin(i-r)}{\cos r} = h(e,i)$$

Deplasarea creşte odată cu creşterea grosimii lamei şi a unghiului de incidenţă. Pentru unghiuri mici:

$$h = \frac{e(i-r)}{1} \cong ei\left(1-\frac{r}{i}\right) \cong ei\left(1-\frac{r}{nr}\right) = ei\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

deci deplasarea este dependentă de grosimea lamei, unghiul de incidenţă şi indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lama.

Grosimea aparentă

Imaginea unui punct real dat de o lamă este virtuală. Dacă lama are indicele de refracţie mai mare decât cel al mediilor alăturate, imaginea este mai aproape de lamă (figurile 3.9 *a* şi 3.9 *b*).

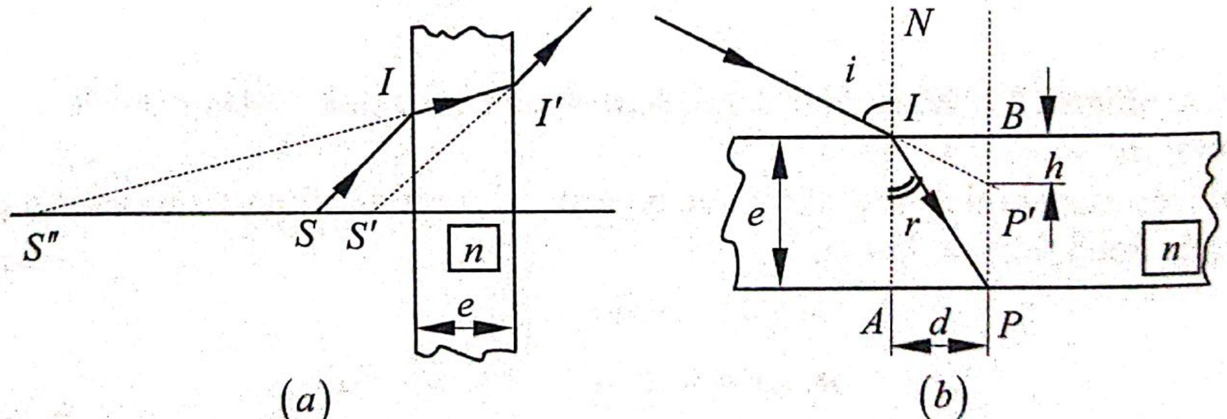


Figura 3.9. Determinarea grosimii aparente a unei lame cu feţe plan-paralele

Folosind notaţiile din figura 3.9 *b*, în triunghiul ΔIAP se poate scrie:

$$tgr = \frac{AP}{IA} = \frac{d}{e} \Rightarrow d = etgr$$

De asemenea, în triunghiul $\Delta IBP'$:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-i\right)=\frac{BP'}{IB}=\frac{h}{d}\Rightarrow h=d\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-i\right)=\frac{d}{tgi}=e\frac{tgr}{tgi}=e\frac{\sin r}{\sin i}\cdot\frac{\cos i}{\cos r}$$

Se poate folosi legea refracţiei:

$$\sin i=n\sin r\Rightarrow\frac{\sin r}{\sin i}=\frac{1}{n}$$

şi astfel expresia lui h devine:

$$h=e\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos i}{\cos r}=\frac{e}{n}\cdot\frac{n\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}=\frac{e\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$$

Dacă observatorul priveşte pe direcţia normalei:

$$i=0\Rightarrow\cos i=1\Rightarrow h=\frac{e}{n}$$

Rezultă astfel că punctul P, situat pe faţa inferioară a lamei, va fi perceput mai aproape de suprafaţa superioară a lamei decât este în realitate; imaginea punctului P este virtuală şi mai aproape de lamă.

Modificarea drumului optic

Dacă se introduce în drumul unui fascicul paralel o lamă dintr-un material de indice de refracţie n, drumul optic creşte cu δ (figura 3.10).

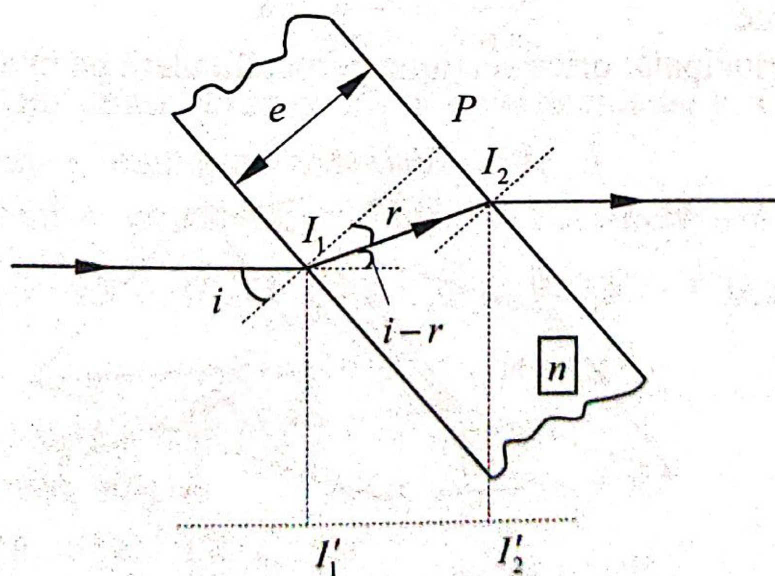


Figura 3.10. Modificarea drumului optic prin lama cu feţe plan-paralele

Conform figurii 3.10, se poate scrie:

$$\delta = nI_1I_2 - I_1'I_2'$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(i-r) = \frac{I_1'I_2'}{I_1I_2} &\Rightarrow I_1'I_2' = I_1I_2\cos(i-r) \\ \cos r = \frac{I_1P}{I_1I_2} &\Rightarrow I_1I_2 = \frac{I_1P}{\cos r} = \frac{e}{\cos r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1'I_2' = \frac{e}{\cos r}\cos(i-r)$$

de unde rezultă:

$$\delta = n\frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r}\cos(i-r) = \frac{e}{\cos r}\left[n - \cos(i-r)\right]$$

Se observă că la incidenţă normală diferenţa de drum devine:

$$i = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \delta = e(n-1)$$

3.3.2. Prisma optică

Prisma optică este un mediu transparent mărginit de doi dioptri plani care se intersectează după o dreaptă numită *muchia* prismei.

Elementele prismei sunt (figura 3.11):

- muchia prismei: linia de intersecţie a celor două feţe plane ale prismei
- unghiul prismei (unghiul de refringenţă): unghiul diedru dintre cele două feţe plane
- secţiunea principală: orice secţiune perpendiculară pe muchie

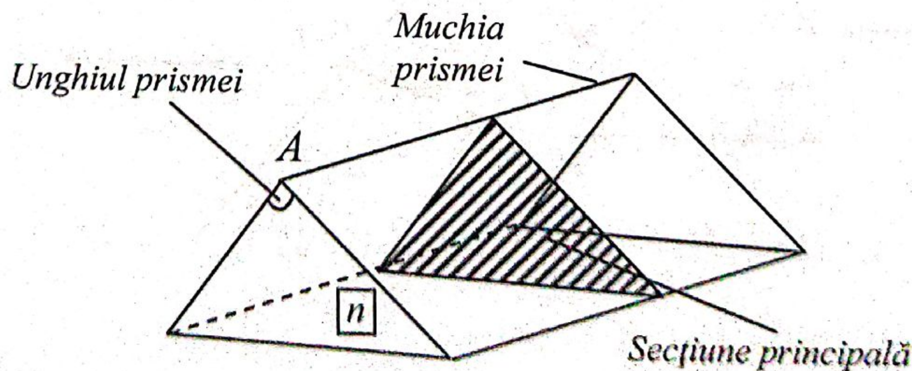


Figura 3.11. Elementele prismei optice

Formulele prismei optice

Întâlnind faţa AB a prismei, raza de lumină suferă o refracţie în punctul de incidenţă I_1 (figura 3.12).

Conform legii refracţiei:

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

Întâlnind faţa AC a prismei, raza de lumină suferă o a doua refracţie în punctul de emergenţă I_2, îndepărtându-se de normală după legea:

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

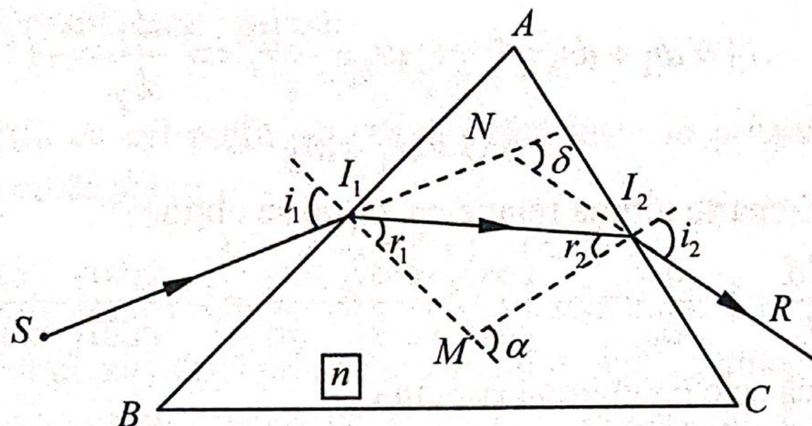


Figura 3.12. Mersul razelor de lumină prin prisma optică

Rezultă că se poate calcula indicele de refracţie al prismei:

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin i_2}{\sin r_2}$$

Unghiul dintre direcţia SI_1 a razei incidente şi direcţia I_2R a razei emergente se numeşte *unghi de deviaţie*, δ.

Unghiul α este exterior triunghiului ΔI_1I_2M:

$$\alpha = r_1 + r_2 = \left(90° - \widehat{AI_1I_2}\right) + \left(90° - \widehat{AI_2I_1}\right) = 180° - \left(\widehat{AI_1I_2} - \widehat{AI_2I_1}\right)$$

$$\alpha = 180° - (180° - A) = A$$

Cu această observaţie se poate scrie:

$$A = r_1 + r_2$$

respectiv pentru unghiul de deviaţie:

$$\delta = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = i_1 + i_2 - A$$

Deviaţia minimă

Se consideră unghiul de deviaţie ca funcţie de i_1:

$$\delta = \delta(i_1)$$

Se diferenţiază formulele prismei:

$$\cos i_1 di_1 = n\cos r_1 dr_1 \Rightarrow di_1 = n\frac{\cos r_1}{\cos i_1}dr_1$$

$$\cos i_2 di_2 = n\cos r_2 dr_2 \Rightarrow di_2 = n\frac{\cos r_2}{\cos i_2}dr_2$$

$$dA = dr_1 + dr_2 = 0 \Rightarrow dr_1 = -dr_2 \Rightarrow \frac{dr_1}{dr_2} = -1$$

$$d\delta = di_1 + di_2$$

Se împarte ultima relaţie cu di_1 şi se obţine:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 + \frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos i_2 \cdot \cos r_1}\cdot\frac{dr_2}{dr_1} = 1 - \frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos i_2 \cdot \cos r_1}$$

Dacă este îndeplinită condiţia

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0$$

deviaţia trece printr-un extrem[9].

$$\frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos r_1 \cdot \cos i_2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 = i \\ r_1 = r_2 = r \end{cases}$$

$$d_{\min} = 2i - 2r = 2(i - r)$$

Când deviaţia este minimă, raza traversează proba simetric faţă de bisectoarea unghiului prismei, A.

Cu cât unghiul A al prismei este mai mare, pentru acelaşi unghi de incidenţă, deviaţia δ este şi ea mai mare.

Se observă că folosind unghiul de deviaţie minimă se poate determina indicele de refracţie al prismei:

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= 2i - 2r \\ \sin i &= n\sin r \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\frac{\delta_m + 2r}{2}}{\sin\frac{2r}{2}} \overset{2r=A}{=} \frac{\sin\frac{\delta_m + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

---

[9] Studiind derivata a doua în raport cu i_1 a funcţiei $\delta = \delta(i_1)$, se poate arăta că acest extrem este un minim.

Condiţia de emergenţă

Dintre toate razele incidente pe o prismă, numai o parte reuşesc să o traverseze - acelea pentru care este îndeplinită condiţia de emergenţă:

$$r_2 \leq l$$

Dacă incidenţa este razantă, $i_1 = 90°$, unghiul de refracţie r_1 are cea mai mare valoare posibilă, l. Unghiul r_2 sub care cade raza pe a doua faţă a prismei este egal cu:

$$r_2 = A - r_1 = A - l$$

Pentru ca cel puţin o rază să poată ieşi din prismă, trebuie ca $r_2 \leq l$, ceea ce duce la:

$$r_2 = A - l \leq l \Rightarrow A \leq 2l$$

Razele pentru care $r_2 > l$ se vor reflecta total.

În concluzie, dacă prisma are unghiul $A \leq 2l$, atunci toate razele incidente vor părăsi prisma pe faţa AC, oricare ar fi unghiul de incidenţă. Dacă unghiul prismei nu îndeplineşte condiţia de emergenţă, deci $A > 2l$, toate razele intrate în prismă se vor reflecta total pe faţa AC.

Observaţie

Dacă feţele prismei fac un unghi mic ($A < 5°$), iar incidenţa este, la rândul său, mică, se poate înlocui valoarea funcţiei sinus cu unghiul exprimat în radiani, obţinând:

$$i_1 = nr_1 \qquad i_2 = nr_2 \qquad A = r_1 + r_2$$

$$\delta = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = n(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2) = (n-1)(r_1 + r_2) = (n-1)A$$

Rezultă că deviaţia este practic independentă de unghiul de incidenţă, atunci când acesta este mic. Ea este proporţională cu:

- unghiul A al prismei
- indicele de refracţie n al materialului din care este confecţionată prisma

Fie o prismă a cărei secţiune principală este un triunghi dreptunghic isoscel (figura 3.13). Dacă pe faţa AB cade o rază de lumină monocromatică, ea intră în prismă nedeviată şi ajunge pe faţa AC sub un unghi de 45°. Dacă acesta este mai mare decât unghiul

limită, raza de lumină se va reflecta total, căzând perpendicular pe faţa BC, pe care o va părăsi nedeviată.

O astfel de prismă se va numi *prismă cu reflexie totală* şi ea deviază raza incidentă cu 90°.

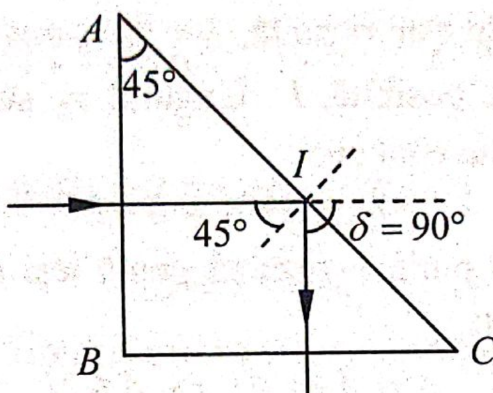


Figura 3.13. Prismă cu reflexie totală şi unghi de deviaţie de 90°

Dacă raza de lumină cade normal pe ipotenuza AC, ea este deviată cu 180° (figura 3.14).

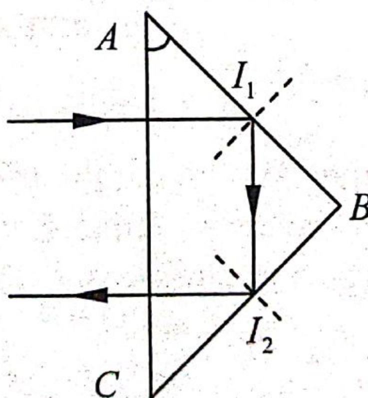


Figura 3.14. Prismă cu reflexie totală şi unghi de deviaţie de 180°

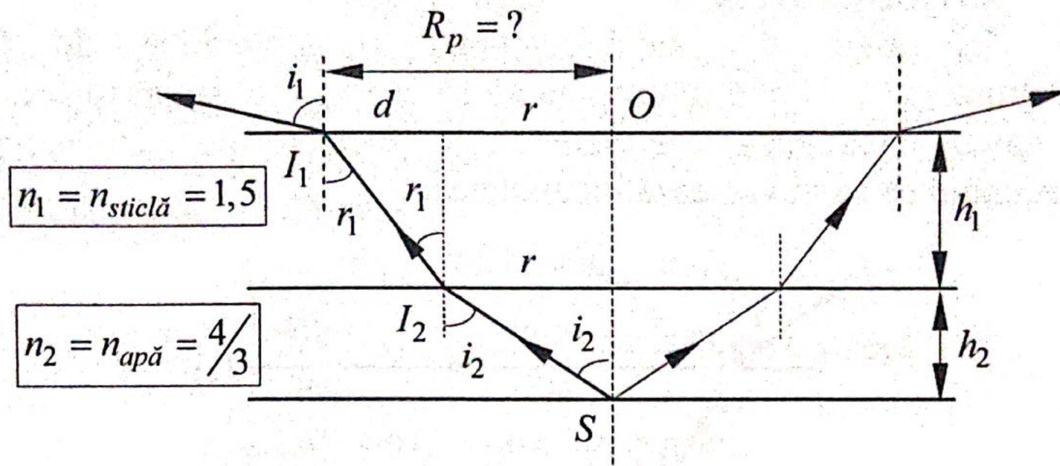
3.4. Aplicaţii

Problema nr. 1.

O platformă de sticlă acoperă un bazin în care se află apă, intrând în contact cu apa. Pe fundul bazinului se află o sursă punctiformă de lumină, iar pe platformă se află un observator. Stabiliţi dacă este posibil ca acesta să nu observe sursa de pe fundul bazinului.

- pentru a nu vedea sursa de lumină, observatorul trebuie să se afle pe platformă la o distanţă R_p de verticala corespunzătoare sursei:

$$R_p = d + r$$



- la refracţia aer-sticlă, legea a doua a refracţiei se scrie:

$$n_{aer} \sin i_1 = n_1 \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{1}{n_1} \sin i_1$$

- pentru ca raza de lumină ce provine de la sursă să nu intre în ochiul observatorului, trebuie ca unghiul i_1 să fie de $90°$; relaţia de mai sus devine:

$$\sin r_1 = \frac{1}{n_1} \sin 90° = \frac{1}{n_1}$$

- din geometria problemei rezultă:

$$tg r_1 = \frac{d}{h_1} \Rightarrow d = h_1 \frac{\sin r_1}{\cos r_1} = h_1 \frac{\sin r_1}{\sqrt{1 - \sin^2 r_1}} = \frac{h_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}}$$

- la refracţia sticlă-apă:

$$n_{sticlă} \sin r_1 = n_{apă} \sin i_2 \Rightarrow \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin r_1 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{n_1} == \frac{1}{n_2}$$

respectiv:

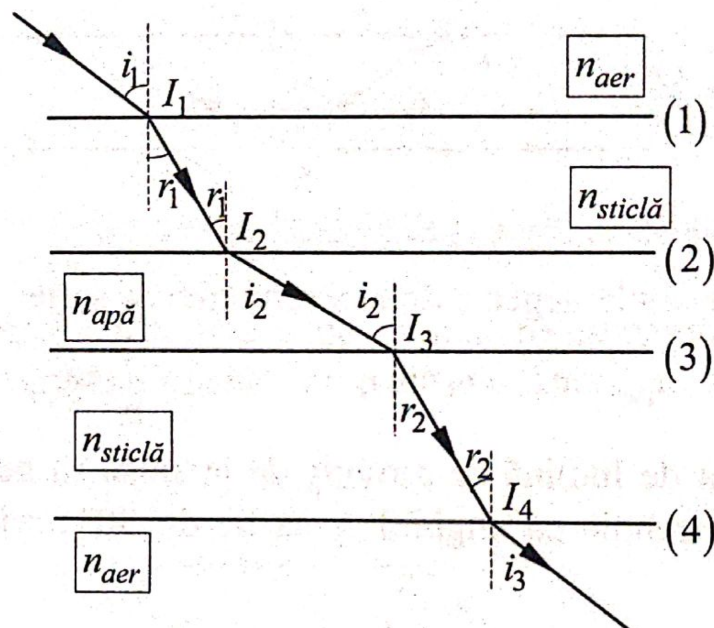
$$tg i_2 = \frac{r}{h_2} \Rightarrow r = h_2 \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = \frac{h_2}{\sqrt{n_2^2 - 1}}$$

- prin urmare, distanţa R_p căutată este:

$$R_p = \frac{h_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{h_2}{\sqrt{n_2^2 - 1}}$$

Problema nr. 2.

Un bloc de sticlă prezintă o incluziune de formă paralelipipedică, de apă. Presupunând că blocul este situat în aer, să se stabilească dacă raza emergentă este paralelă cu cea incidentă, considerând că ea traversează incluziunea.



Rezolvare

- se aplică legea a II-a a refracţiei la suprafeţele de separare pe care le întâlneşte raza de lumină
- pentru suprafaţa aer-sticlă (1):

$$n_{aer} \sin i_1 = n_{sticlă} \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1$$

- pentru suprafaţa sticlă-apă (2):

$$n_{sticlă} \sin r_1 = n_{apă} \sin i_2$$

$$\sin i_2 = \frac{n_{sticlă}}{n_{apă}} \sin r_1 = \frac{n_{sticlă}}{n_{apă}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1 = \frac{n_{aer}}{n_{apă}} \sin i_1$$

- situaţia este similară celei în care raza de lumină trece din aer direct în apă
- pentru suprafaţa apă-sticlă (3):

$$n_{apă} \sin i_2 = n_{sticlă} \sin r_2 \;\Rightarrow\; \sin r_2 = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} \sin i_2$$

$$\sin r_2 = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{apă}} \sin i_1 = \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1$$

- lucrurile stau ca şi când raza de lumină ar trece direct din aer în sticlă, iar celelalte medii nu ar exista (ele trebuie luate în considerare dacă se studiază devierea produsă de mediile străbătute de raza de lumină)
- pentru suprafaţa sticlă-aer (4):

$$n_{sticlă} \sin r_2 = n_{aer} \sin i_3$$

$$\sin i_3 = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin r_2 = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1 = \sin i_1$$

$$\sin i_3 = \sin i_1 \;\Rightarrow\; i_3 = i_1$$

deci razele incidentă şi emergentă sunt paralele

Observaţie

- dacă trecerea sticlă-apă se produce la limită totală ($n_{apă} < n_{sticlă}$):

$$n_{sticlă} \sin r_{sticlă} = n_{apă} \sin 90° \;\Rightarrow\; \sin r_{sticlă} = \sin l_{sticlă-apă} = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}}$$

- aceasta ar însemna un unghi de incidenţă i_1' egal cu:

$$\sin i_1' = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin r_{sticlă} = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} = \frac{n_{apă}}{n_{aer}} > 1$$

respectiv, pentru reflexie totală:

$$r_1 > l_{sticlă-apă} \;\Rightarrow\; \sin r_1 > \sin l_{sticlă-apă}$$

$$n_{sticlă} \sin r_1 > n_{sticlă} \sin l_{sticlă-apă} \;\Rightarrow\; n_{aer} \sin i_1 > n_{sticlă} \sin l_{sticlă-apă}$$

$$\sin i_1 > \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin l_{sticlă-apă} \;\Rightarrow\; \sin i_1 > \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} = \frac{n_{apă}}{n_{aer}} > 1$$

ceea ce nu se poate; prin urmare, pentru orice unghi de incidenţă, va exista emergenţă, indiferent de indicii de refracţie consideraţi ($n_{apă} > n_{aer}$)

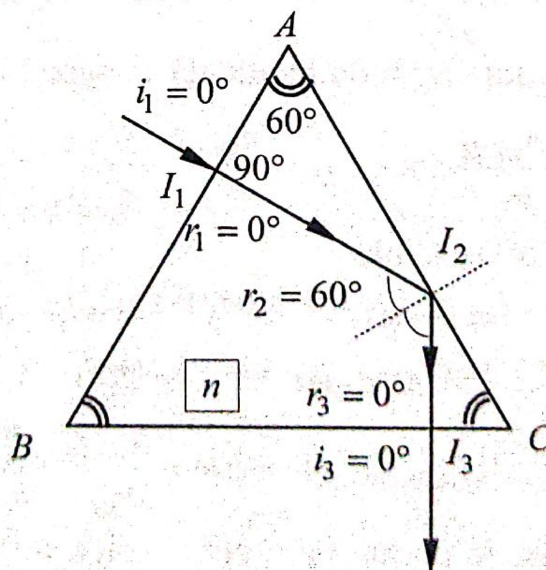
- din expresia de mai sus rezultă că se poate pune problema unei reflexii totale în cazul în care lama se află, la rândul său, scufundată într-un mediu pentru care $\frac{n_{apă}}{n_{mediu}} < 1$

Problema nr. 3.

O rază de lumină monocromatică este incidentă normal pe faţa AB a unei prisme de sticlă situată în aer, având secţiunea principală triunghi echilateral şi indicele de refracţie $n = 1,5$. Să se stabilească mersul razei de lumină prin prisma considerată. Toate feţele prismei sunt transparente.

Rezolvare

- deoarece incidenţa este normală pe faţa AB a prismei, unghiul de incidenţă este nul, $i_1 = 0°$, deci şi cel de refracţie va fi nul ($r_1 = 0°$), ceea ce înseamnă că raza va intra în prismă nedeviată
- dacă a doua faţă pe care se realizează incidenţa este AC, situaţia este următoarea:



- în triunghiul ΔAI_1I_2:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\widehat{AI_1I_2}\right)=90^\circ \\ m\left(\widehat{I_1AI_2}\right)=60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{AI_2I_1}\right)=30^\circ \Rightarrow r_2=60^\circ$$

- se poate încerca o aplicare a celei de a doua legi a refracţiei în punctul I_2, ceea ce va duce la următoarea situaţie (s-a notat cu i_2 unghiul de emergenţă de pe faţa AC):

$$n\sin 60^\circ=\sin i_2 \Rightarrow \sin i_2=1{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}3>1$$

rezultat inacceptabil din punct de vedere matematic, ceea ce înseamnă că lumina nu poate părăsi prisma pe faţa considerată !

- prin urmare, avem de-a face cu o reflexie totală: raza de lumină ar urma să intre într-un mediu mai puţin dens, ceea ce recomandă calculul unghiului limită:

$$1{,}5\cdot\sin l=1\cdot\sin 90^\circ \Rightarrow \sin l=\frac{1}{1{,}5} \Rightarrow l=41{,}81^\circ\approx 42^\circ<r_2=60^\circ$$

- se observă că, într-adevăr, incidenţa pe faţa AC are loc sub un unghi mai mare decât unghiul limită, deci apare reflexia totală; raza se reflectă în I_2 şi cade pe faţa BC în punctul I_3

- în triunghiul ΔCI_3I_2:

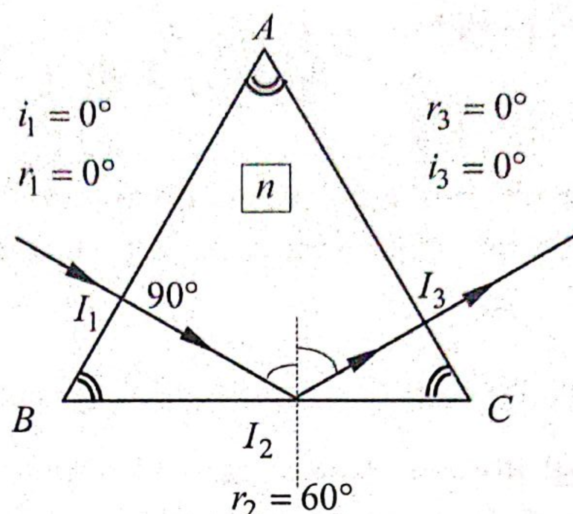
$$\left.\begin{array}{l} m\left(\widehat{CI_2I_3}\right)=90^\circ-60^\circ=30^\circ \\ m\left(\widehat{I_3CI_2}\right)=60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{I_2I_3C}\right)=90^\circ \Rightarrow r_3=0^\circ$$

- cu alte cuvinte, din geometria problemei rezultă că incidenţa pe faţa BC a prismei este normală, ceea ce înseamnă că raza de lumină va trece în al doilea mediu nedeviată (perpendicular pe faţa BC):

$$i_3=0^\circ$$

- dacă a doua faţă pe care s-ar realiza incidenţa este BC, situaţia ar fi similară cu cea descrisă mai sus

- va apărea o reflexie totală pe faţa BC, urmată de o incidenţă normală pe faţa AC, în punctul I_3, deci raza de lumină va părăsi prisma perpendicular pe aceasta



Observaţie

- deoarece incidenţa pe prima faţă a prismei este normală:

$$i_1 = 0° \Rightarrow r_1 = 0°$$

- ştiind că $r_1 + r_2 = A$, rezultă că $r_2 = A = 60°$, deci incidenţa pe a doua faţă va avea loc sub un unghi mai mare decât unghiul critic, deci va apărea reflexia totală, raza de lumină ieşind din prismă pe cea de a treia faţă a acesteia, perpendicular pe aceasta, aşa cum s-a arătat

Problema nr. 4.

O rază de lumină este incidentă sub un unghi de $60°$ pe o prismă având indicele de refracţie $n = 1,5$ şi unghiul refringent $A = 60°$. Să se determine unghiul de emergenţă, ştiind că prisma este situată în aer. Care ar trebui să fie indicele de refracţie al mediului din dreapta, pentru ca emergenţa pe a doua faţă a prismei să se producă la limită ?

Rezolvare

- pentru refracţia pe prima faţă a prismei se poate scrie:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 60°}{1,5} = 0,577 \Rightarrow r_1 \approx 35°$$

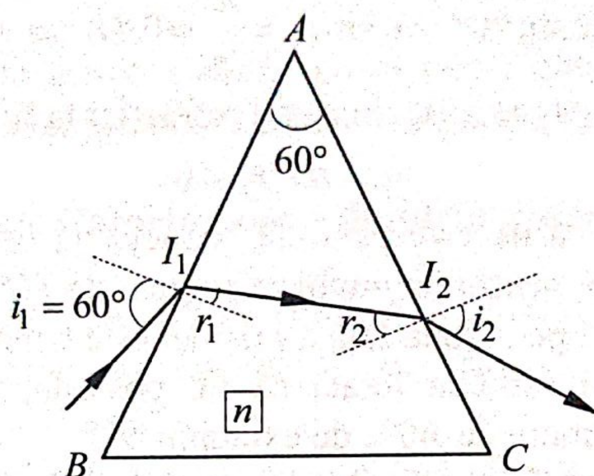
- deoarece $r_1 + r_2 = A$, rezultă:

$$r_2 = 60° - 35° = 25°$$

- presupunând că faţa AC separă mediul cu indicele de refracţie n (mediul prismei) de cel cu indicele de refracţie n' (mediul de emergenţă), se poate scrie:

$$n\sin r_2 = n'\sin 90° \Rightarrow n' = n\sin r_2 \approx 0{,}63 < 1$$

ceea ce nu este posibil

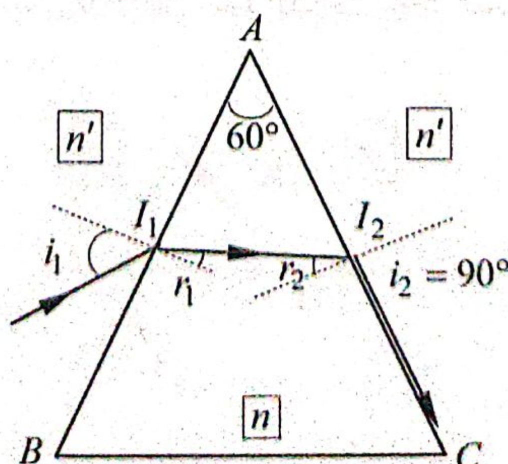


- rezultă astfel că în cazul prismei date, la un unghi incidenţă de $60°$, nu poate apărea refracţia la limită pe a doua faţă a prismei, indiferent de tipul mediului de emergenţă

Problema nr. 5.

O prismă de sticlă ($n = 1{,}5$) este scufundată într-un bazin cu apă ($n_{apă} = 4/3$), în care se află o sursă punctiformă de lumină. Arătaţi în ce condiţii trebuie să se realizeze incidenţa, pentru ca emergenţa pe a doua faţă a prismei să nu poată avea loc, cunoscând că valoarea unghiului refringent al acesteia este $A = 60°$.

Rezolvare



- pentru ca emergenţa pe faţa AC a prismei să nu poată avea loc, trebuie ca unghiul r_2 să fie mai mare decât unghiul limită:

$$n \sin r_2 = n' \sin 90° \Rightarrow \sin r_2 = \frac{n'}{n} = 0,88 \Rightarrow r_2 \approx 62,73°$$

- ştiind că $r_1 + r_2 = A$, rezultă, în cazul refracţiei la limită:

$$r_1 = A - r_2 < 0$$

ceea ce înseamnă că nu este posibilă refracţia la limită pe faţa AC şi nici refracţia totală, pentru un unghi refringent de $60°$
- deoarece refracţia pe a doua faţă a prismei este condiţionată de unghiul prismei, pentru ca reflexia totală să fie posibilă, trebuie ca unghiul prismei să fie mai mare de $60°$, de exemplu $90°$
- în acest caz, la limită:

$$r_1 = 90° - 62,73° = 27,27°$$

şi astfel se poate determina unghiul de incidenţă corespunzător:

$$n' \sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin i_1 = \frac{n}{n'} \sin r_1 \approx 0,51 \Rightarrow i_1 \approx 31°$$

CAPITOLUL 4. DIOPTRUL SFERIC

Se numeşte *dioptru sferic* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene, între care există o suprafaţă de separare sferică.

4.1. Caracterizarea dioptrului sferic

Fie un dioptru cu raza de curbură R, care separă două medii cu indicele de refracţie n_1, respectiv n_2. Se va folosi următoarea convenţie:

- pentru că dioptrul este limitat de o calotă sferică, se consideră drept origine a segmentelor pe axa optică vârful calotei, V, iar pentru alte segmente, punctul de incidenţă pe dioptru
- toate segmentele măsurate de-a lungul axei optice principale care au un capăt în vârful dioptrului se măsoară de la vârf spre dreapta (în sensul propagării luminii) şi vor fi considerate pozitive, sau de la vârf spre stânga şi vor fi considerate negative
- pe verticală, segmentele se măsoară de la axa optică în sus şi atunci vor fi considerate pozitive sau în jos, iar atunci vor fi considerate negative
- unghiurile de incidenţă, respectiv de refracţie, sunt pozitive dacă, pentru a suprapune raza peste normală, trebuie să rotim raza în sensul acelor de ceasornic
- unghiurile pe care le fac razele cu axa optică sunt pozitive dacă rotind axa optică în acelaşi sens, ea se suprapune peste rază

Se disting următoarele elemente ale dioptrului sferic (figura 4.1):

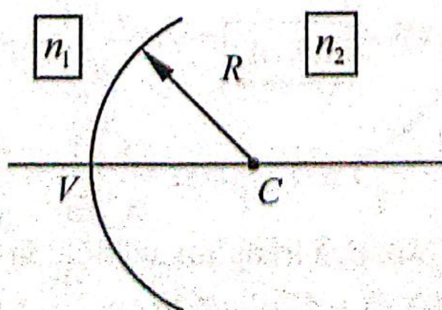


Figura 4.1. Elementele dioptrului sferic

- raza dioptrului, R (raza sferei din care face parte dioptrul)
- centrul dioptrului, C (centrul sferei din care face parte dioptrul)
- vârful dioptrului, V
- axa optică principală a dioptrului, VC (trece prin vârful dioptrului şi centrul optic al acestuia)
- axele optice secundare (orice dreaptă care trece prin centrul C şi un punct oarecare al dioptrului, existând astfel o infinitate de axe optice secundare)
- indicii de refracţie ai celor două medii, n_1, respectiv n_2

4.2. Formarea imaginilor în dioptrul sferic

Se va studia formarea imaginilor în dioptrul sferic, în condiţiile unor fasciculele incidente largi.

4.2.1. Imaginea sagitală

Fie SI o rază de lumină incidentă pe un dioptru sferic având raza de curbură R (figura 4.2).

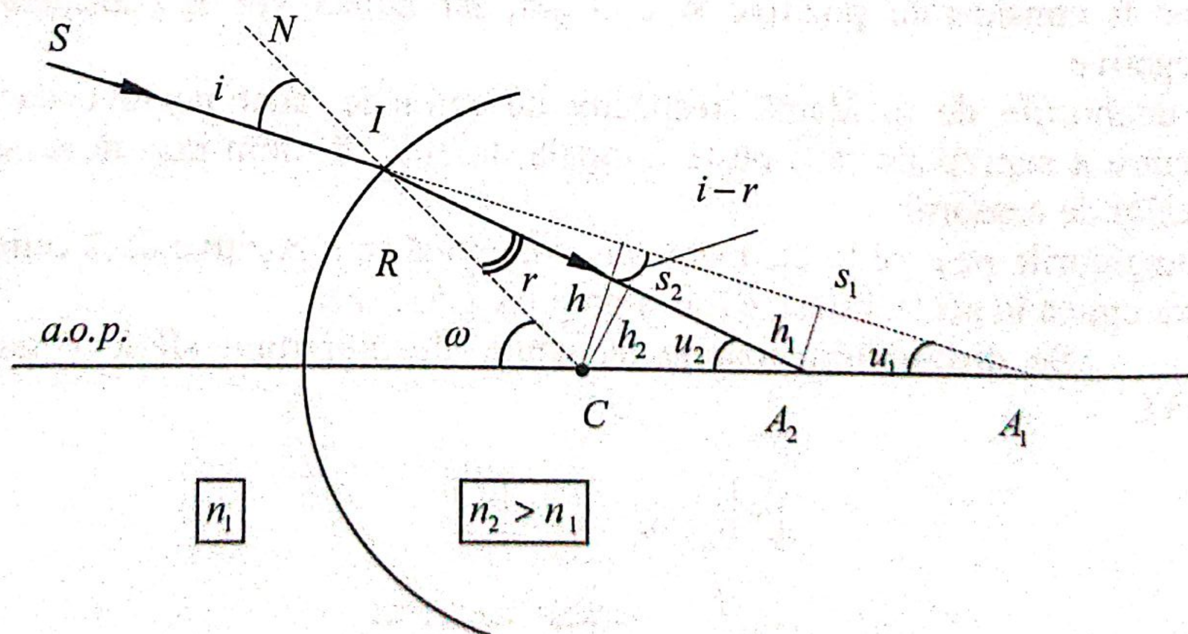


Figura 4.2. Formarea imaginii sagitale în dioptrul sferic

Aceasta se refractă în I, apoi se propagă pe drumul IA_2.

Se fac notațiile:

$$IA_1 = s_1;\ IA_2 = s_2$$

și se observă că:

$$Aria(\Delta A_1IC) = Aria(\Delta A_1IA_2) + Aria(\Delta A_2IC)$$

Se exprimă cele trei arii din relația de mai sus:

$$\left.\begin{array}{l} Aria(\Delta A_1IC) = \dfrac{s_1h}{2} \\ \sin i = \dfrac{h}{R} \Rightarrow h = R\sin i \end{array}\right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_1IC) = \frac{1}{2}s_1R\sin i$$

$$\left.\begin{array}{l} Aria(\Delta A_1IA_2) = \dfrac{s_1h_1}{2} \\ \sin(i-r) = \dfrac{h_1}{s_2} \Rightarrow h_1 = s_2\sin(i-r) \end{array}\right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_1IA_2) = \frac{1}{2}s_1s_2\sin(i-r)$$

$$\left.\begin{array}{l} Aria(\Delta A_2IC) = \dfrac{h_2s_2}{2} \\ \sin r = \dfrac{h_2}{R} \Rightarrow h_2 = R\sin r \end{array}\right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_2IC) = \frac{1}{2}Rs_2\sin r$$

și rezultă egalitatea:

$$s_1R\sin i = s_1s_2\sin(i-r) + Rs_2\sin r$$

$$s_1R\frac{\sin i}{\sin r} = s_1s_2\left(\frac{\sin i}{\sin r}\cos r - \cos i\right) + Rs_2$$

Dar:

$$n_1\sin i = n_2\sin r \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

și se poate face înlocuirea:

$$s_1R\frac{n_2}{n_1} = s_1s_2\left(\frac{n_2}{n_1}\cos r - \cos i\right) + Rs_2 \quad |:s_1s_2R$$

$$\frac{1}{s_2}\cdot\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2}{n_1}\cos r - \cos i\right) + \frac{1}{s_1} \quad |\cdot n_1$$

$$\boldsymbol{\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{1}{R}(n_2\cos r - n_1\cos i)}$$

relaţie care portă numele de *ecuaţia imaginii sagitale*.

Toate razele care cad pe dioptru sub acelaşi unghi de incidenţă (ele se află pe un con cu vârful în A_1) se întâlnesc după refracţie în A_2 (imaginea sagitală a izvorului virtual A_1), imagine care se află pe axa optică. Dacă se variază poziţia punctului I (unghiul de incidenţă i_1), imaginea A_2 descrie o porţiune din axa optică (*focala sagitală*).

Observaţii

1. Dacă unghiul de incidenţă i este mic, $\cos i \approx 1$, iar pentru unghiul de refracţie (care este mai mic decât cel de incidenţă, deoarece $n_2 > n_1$) se poate scrie $\cos r \approx 1$, caz în care ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

2. Dacă raza dioptrului sferic este foarte mare, $R \to \infty$, ecuaţia imaginii sagitale se scrie:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_2}$$

indiferent de valoarea unghiului de incidenţă; aceasta este ecuaţia imaginii sagitale determinată la studiul dioptrului plan.

3. Dacă se pune condiţia $n_2 = -n_1$ (raza de lumină se întoarce în mediul din care a venit, deci suferă reflexie), ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{-n_1}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{1}{R}\left(-n_1 \cos r - n_1 \cos i\right) \Leftrightarrow \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{R}\left(\cos r + \cos i\right)$$

Folosind legile reflexiei, $i = r$, relaţia de mai sus devine:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2\cos i}{R}$$

obţinându-se astfel ecuaţia imaginii sagitale a oglinzilor sferice (fascicule largi).

4.2.2. Imaginea tangențială

Fie două raze în același plan meridian, care întâlnesc suprafața dioptrului în punctele de incidență I_1, respectiv I_2 (figura 4.3).

Observând că în $\Delta I_1 AC$, ω este unghi exterior, se poate scrie:

$$\omega = i + u_1 \Rightarrow i = \omega - u_1$$

De asemenea, ω este exterior și triunghiului $\Delta I_1 A_1 C$:

$$\omega = r + u_2 \Rightarrow r = \omega - u_2$$

Diferențiind relațiile obținute, rezultă:

$$di = d\omega - du_1 \qquad dr = d\omega - du_2$$

Se diferențiază și legea refracției aplicată în punctul I_1 și se obține:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$n_1 \cos i \cdot di = n_2 \cos r \cdot dr$$

$$n_1 \cos i (d\omega - du_1) = n_2 \cos r (d\omega - du_2)$$

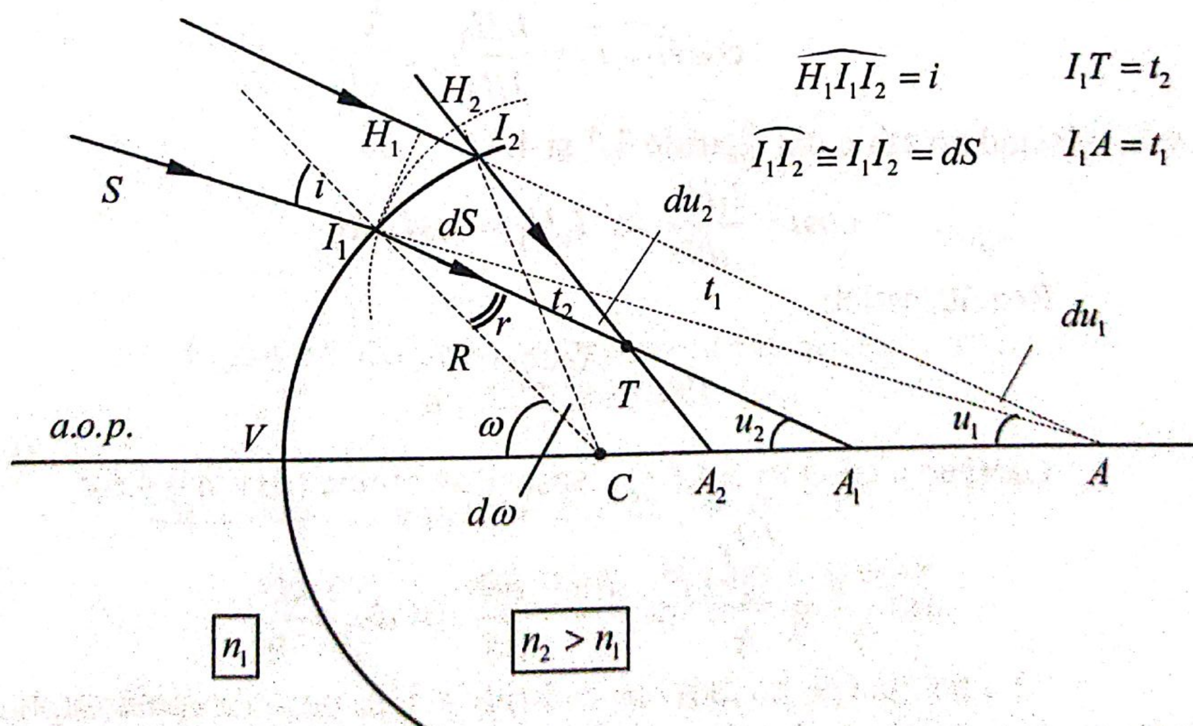


Figura 4.3. Formarea imaginii tangențiale în dioptrul sferic

Se construieşte un cerc cu raza t_1 şi cu centrul în A, care intersectează dreapta AI_2 în H_1:

$$I_1A \equiv AH_1 = t_1$$

În triunghiul ΔI_1H_1A, isoscel (figura 4.4.*a*), se construieşte bisectoarea unghiului A, care este mediană, mediatoare şi înălţime corespunzătoare coardei I_1H_1; se formează două triunghiuri dreptunghice congruente, în care:

$$\sin\frac{du_1}{2} = \frac{\frac{I_1H_1}{2}}{t_1} \Rightarrow \frac{du_1}{2} = \frac{I_1H_1}{2t_1} \Rightarrow du_1 = \frac{I_1H_1}{t_1}$$

unde s-a ţinut cont de faptul că pentru un unghi α foarte mic, exprimat în radiani, $\sin\alpha \approx \alpha$. În plus, unghiul du_1 fiind foarte mic, arcul $\widehat{I_1H_1}$ se confundă cu coarda I_1H_1. Pe de altă parte, triunghiul $\Delta I_1H_1I_2$ poate fi considerat dreptunghic în H_1, cu unghiul $\widehat{H_1I_1I_2}$ aproximativ egal cu unghiul de incidenţă i. Se scrie astfel:

$$\cos\widehat{H_1I_1I_2} = \frac{I_1H_1}{I_1I_2}$$

sau, folosind notaţiile din figurile 4.3 şi 4.4:

$$\cos i = \frac{I_1H_1}{dS} \Rightarrow I_1H_1 = \cos i \cdot dS$$

Rezultă astfel:

$$du_1 = \frac{dS\cos i}{t_1}$$

Lucrând analog în ΔI_1CI_2, isoscel, se obţine (figura 4.4.*b*):

$$\sin\frac{d\omega}{2} = \frac{\frac{I_1I_2}{2}}{R} \Rightarrow \frac{d\omega}{2} = \frac{dS}{2R} \Rightarrow d\omega = \frac{dS}{R}$$

Se construieşte un cerc cu centrul în T şi cu raza egală cu t_2; acesta intersectează A_2I_2 în H_2, iar unghiul $\widehat{I_2I_1H_2} = r$. Procedând ca în cazurile lui du_1 şi $d\omega$, se poate scrie (figura 4.4.*c*):

$$\left.\begin{aligned}&\cos\widehat{H_2I_1I_2}=\frac{I_1H_2}{I_1I_2}\Rightarrow I_1H_2=dS\cos r\\&\sin\frac{du_2}{2}=\frac{\frac{I_1H_2}{2}}{TH_2}\Rightarrow du_2=\frac{I_1H_2}{t_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow du_2=\frac{dS\cos r}{t_2}$$

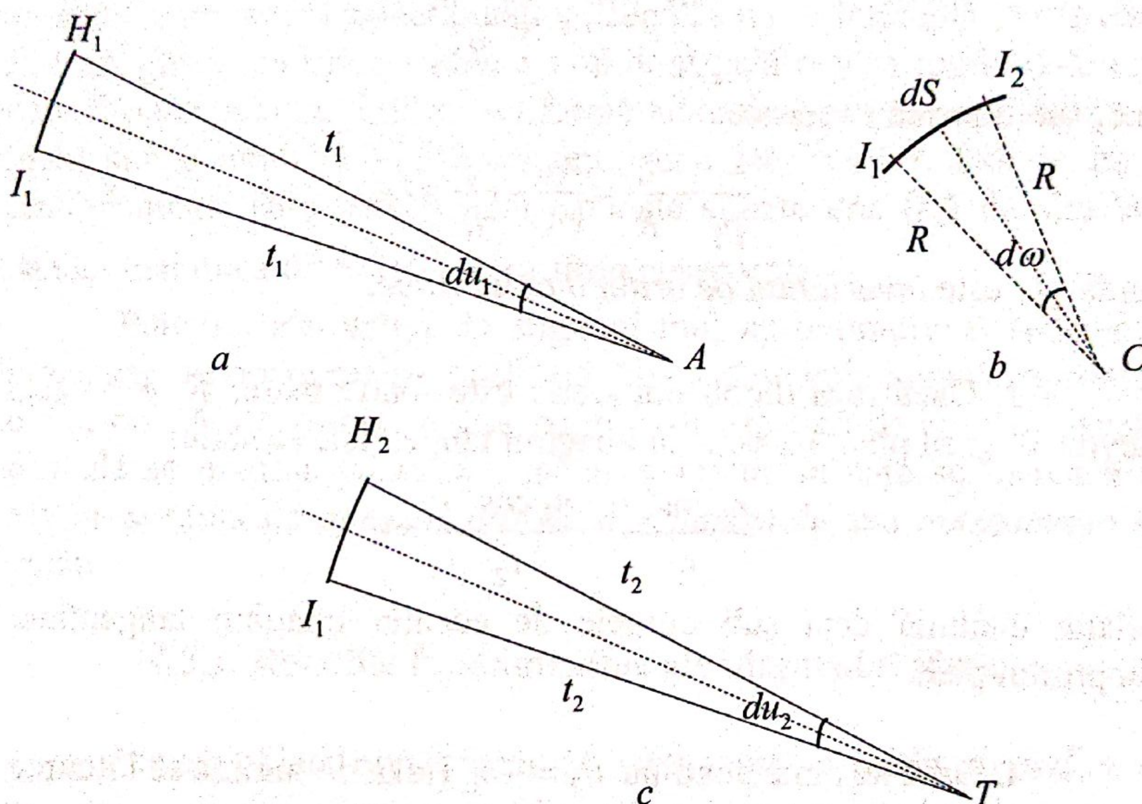


Figura 4.4. Construcţii ajutătoare pentru determinarea lui du_1, $d\omega$, respectiv du_2

Cu aceste valori pentru $d\omega$, du_1 şi du_2, rezultă:

$$\frac{\boldsymbol{n_1\cos^2 i}}{\boldsymbol{t_1}}-\frac{\boldsymbol{n_2\cos^2 r}}{\boldsymbol{t_2}}=\frac{\boldsymbol{n_1\cos i-n_2\cos r}}{\boldsymbol{R}}$$

expresie numită *ecuaţia imaginii tangenţiale*.

Dacă se deplasează planul meridian care trece prin A spre stânga şi spre dreapta poziţiei iniţiale, imaginea T descrie un segment de dreaptă perpendicular pe acest plan (*focala tangenţială*).

Observaţii

1. Existenţa focalelor sagitală şi tangenţială arată faptul că dioptrul sferic nu este stigmatic în cazul fascicolelor largi.

2. Dacă unghiul de incidenţă i este mic, imaginile A_1 şi T se confundă, iar ecuaţia de mai sus devine:

$$\frac{n_2}{t_2}-\frac{n_1}{t_1}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

sau, sub o formă simetrică:

$$\frac{n_1}{p_1}-\frac{n_1}{R}=\frac{n_2}{p_2}-\frac{n_2}{R}=Q_0$$

unde Q_0 este *invariantul de ordin 0 al lui Abbe.*

3. Dacă raza dioptrului sferic este foarte mare, $R\to\infty$, acesta devine dioptru plan, iar ecuaţia imaginii tangenţiale se scrie:

$$\frac{n_1\cos^2 i}{t_1}-\frac{n_2\cos^2 r}{t_2}=0$$

relaţie întâlnită deja sub numele de ecuaţia imaginii tangenţiale a dioptrului plan.

4. Dacă se pune condiţia $n_2=-n_1$ (raza de lumină se întoarce în mediul din care a venit, în urma fenomenului de reflexie), ecuaţia imaginii tangenţiale devine:

$$\frac{n_1\cos^2 i}{t_1}-\frac{-n_1\cos^2 r}{t_2}=\frac{n_1\cos i-(-n_1)\cos r}{R}$$

$$\frac{n_1\cos^2 i}{t_1}+\frac{n_1\cos^2 r}{t_2}=\frac{n_1\cos i+n_1\cos r}{R}$$

respectiv, ţinând cont de a doua lege a reflexiei:

$$\frac{\cos^2 i}{t_1}+\frac{\cos^2 i}{t_2}=\frac{\cos i+\cos i}{R}\Leftrightarrow\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{R\cos i}$$

obţinându-se astfel ecuaţia imaginii tangenţiale a oglinzilor sferice.

4.3. Dioptrul sferic în aproximaţia lui Gauss

În general, formarea unor imagini stigmatice prin sisteme optice este aproape imposibilă şi este legată în primul rând de dificultatea obţinerii în practică a unor sisteme optice care să dea un stigmatism riguros.

Într-o imagine stigmatică, fiecărui punct al obiectului luminos îi corespunde un singur punct imagine, ceea ce nu se întâmplă în realitate, când imaginea unui punct obiect este de regulă o pată luminoasă, care poate fi percepută ca fiind punctiformă atâta timp cât dimensiunile sale rămân sub o anumită limită, caracteristică receptorilor. Este şi cazul ochiului uman, care percepe două puncte situate una faţă de alta la o distanţă mai mică de $5\cdot 10^{-6}\ m$ ca fiind neseparate.

Putem vorbi astfel de stigmatismul aproximativ al sistemelor optice, care se poate realiza dacă se folosesc fascicule înguste, apropiate de axa optică a acestora, foarte puţin înclinate faţă de aceasta. Aceste fascicule se numesc *paraxiale*, iar aproximaţia în care se lucrează cu acestea se numeşte *aproximaţia razelor paraxiale* sau *aproximaţia lui Gauss*.

4.3.1. Relaţiile fundamentale ale dioptrului sferic

Fie un obiect punctiform O_1 situat într-un mediu de indice de refracţie n_1. Dacă unghiurile de incidenţă sunt mici pentru toate razele fascicolului provenit de la obiect, se lucrează în aproximaţia lui Gauss, în care imaginea obiectului printr-un dioptru sferic de rază R se formează în punctul O_2 (figura 4.5).

Se aplică succesiv teorema sinusului în:

$$\Delta IO_1C:\ \frac{IO_1}{\sin\alpha}=\frac{O_1C}{\sin(\pi-i)}$$

$$\Delta IO_2C:\ \frac{IO_2}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{O_2C}{\sin r}$$

Ţinând cont că $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ şi $\sin(\pi-i)=\sin i$, rezultă:

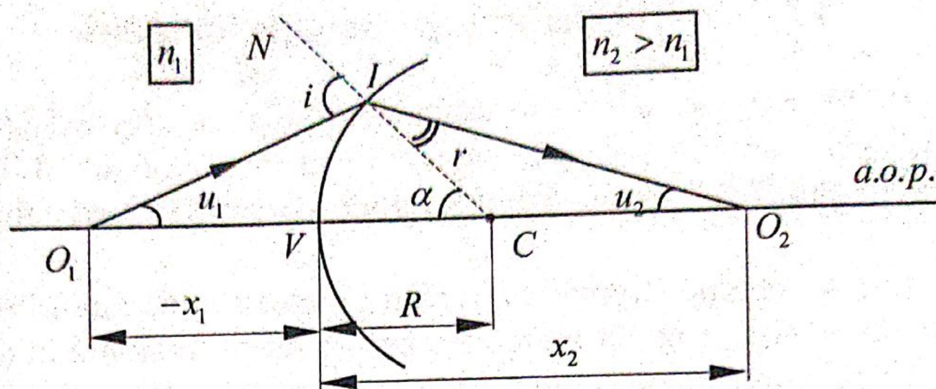


Figura 4.5. Formarea imaginii unui obiect punctiform printr-un dioptru sferic (aproximaţia Gauss)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{IO_1}{\sin\alpha}=\dfrac{O_1C}{\sin i} \Rightarrow \dfrac{IO_1}{O_1C}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin i}\\[2ex] \dfrac{IO_2}{\sin\alpha}=\dfrac{O_2C}{\sin r} \Rightarrow \dfrac{O_2C}{IO_2}=\dfrac{\sin r}{\sin\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{IO_1}{O_1C}\cdot\dfrac{O_2C}{IO_2}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin i}\cdot\dfrac{\sin r}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin r}{\sin i}$$

Dar, din legea refracţiei:

$$n_1\sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{\sin r}{\sin i}=\frac{n_1}{n_2}$$

de unde:

$$\frac{IO_1}{O_1C}\cdot\frac{O_2C}{IO_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

Lucrând în aproximaţia gaussiană, se consideră:

$$IO_1 \simeq VO_1 = -x_1$$
$$IO_2 \simeq VO_2 = x_2$$
$$O_1C = VO_1 + VC \simeq R - x_1$$
$$O_2C = VO_2 - VC \simeq x_2 - R$$

rezultând:

$$\frac{-x_1}{R-x_1}\cdot\frac{x_2-R}{x_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

$$-x_1x_2n_2 + x_1Rn_2 = n_1x_2R - x_1x_2n_1$$

$$x_1x_2\left(n_1-n_2\right)=R\left(n_1x_2-n_2x_1\right) \;\Big|:x_1x_2R$$

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1}$$

Această relaţie poartă numele de *prima relaţie fundamentală a dioptrului sferic*, sau *relaţia punctelor conjugate*.

Observaţie

Dacă în ecuaţiile imaginilor sagitală, respectiv tangenţială, ale dioptrului sferic se pune condiţia ca unghiul de incidenţă să fie foarte mic (aproximaţie Gauss), rezultă următoarele consecinţe:

- unghiul de refracţie este şi mai mic pentru $n_2 > n_1$, deci $\cos i \approx 1$, $\cos r \approx 1$
- ecuaţia imaginii sagitale devine:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

iar cea a imaginii tangenţiale:

$$\frac{n_2}{t_2} - \frac{n_1}{t_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

- analizând figurile 4.2 şi 4.3, se observă că se pot scrie egalităţile:

$$s_1 = t_1 \left(= x_1\right)$$

$$s_2 = t_2 \left(= x_2\right)$$

respectiv relaţia:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

adică chiar ecuaţia punctelor conjugate pentru dioptrul sferic în aproximaţia lui Gauss.

Se observă că în afara aproximaţiei Gauss, dioptrul sferic nu este stigmatic, în timp ce în aproximaţia Gauss, el este stigmatic pentru orice punct obiect, pentru că, pentru o poziţie dată x_1 a obiectului, se obţine o singură poziţie a imaginii, x_2 (care nu depinde de unghiul de incidenţă !).

Se defineşte *mărirea liniară transversală*, notată β, ca fiind raportul dintre mărimea imaginii (y_2) şi mărimea obiectului (y_1):

$$\beta = \frac{y_2}{y_1}$$

Se consideră un obiect liniar A_1B_1, de înălţime y_1, aşezat perpendicular pe axa optică a unui dioptru sferic de rază R. Imaginea reală A_2B_2 a obiectului are înălţimea y_2 (figura 4.6).

Conform figurii 4.6, se poate scrie:

$$-y_2 = x_2 \operatorname{tg} r \approx x_2 \sin r$$

$$y_1 = -x_1 \operatorname{tg} i \approx -x_1 \sin i$$

unde s-a ţinut cont de faptul că unghiurile i şi r sunt mici (lucrând în aproximaţia Gauss).

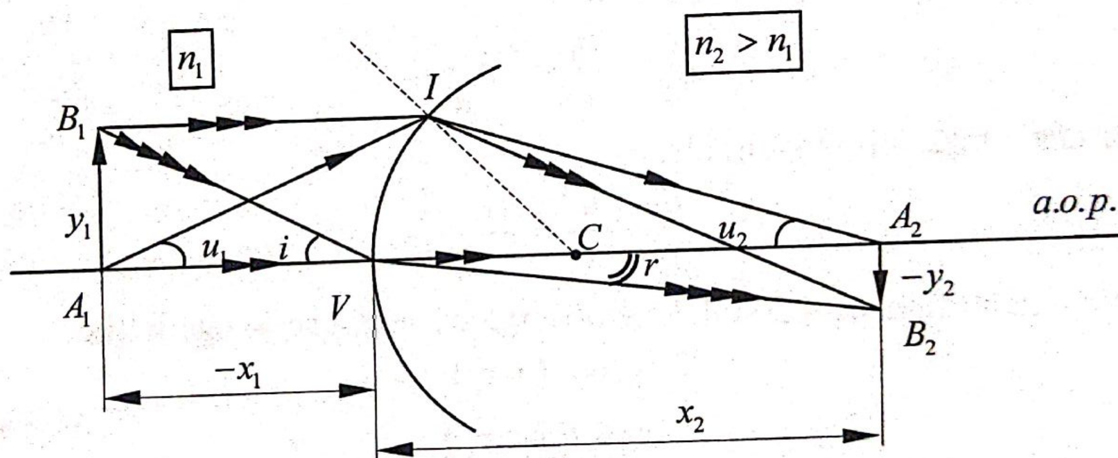


Figura 4.6. Formarea imaginii unui obiect liniar, aşezat perpendicular pe axa optică, printr-un dioptru sferic (aproximaţia Gauss)

Respectând şi legea refracţiei, rezultă pentru mărirea liniară transversală expresia:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

Aceasta este *a doua relaţie fundamentală a dioptrului sferic.*

4.3.2. Focarele dioptrului sferic

Focarul obiect al dioptrului sferic reprezintă locul de pe axa optică unde trebuie să fie situat un izvor luminos punctiform, pentru ca razele care pleacă de la el să părăsească dioptrul paralel cu axa optică.

Focarul imagine al dioptrului sferic reprezintă locul de pe axa optică în care se întâlnesc razele refractate provenite de la un fascicul incident paralel.

Pe axul optic principal există două focare principale (cel obiect şi cel imagine). Pe axele secundare, vor exista câte două focare secundare, situate în planul focal obiect, respectiv imagine.

La fel ca orice imagine obţinută printr-un sistem optic, focarele pot fi:

- reale, dacă se obţin din intersecţia razelor reale (figura 4.7)

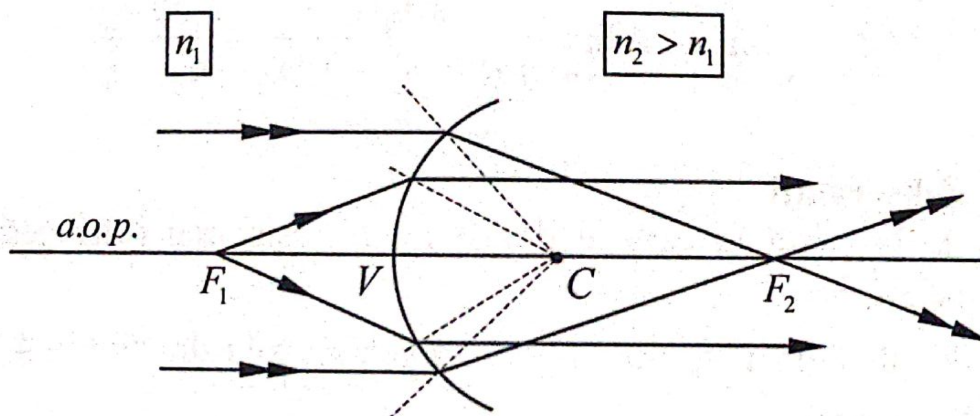


Figura 4.7. Obţinerea focarelor reale ($n_2 > n_1$, $R > 0$)

- virtuale, dacă se obţin prin prelungirea razelor (figura 4.8)

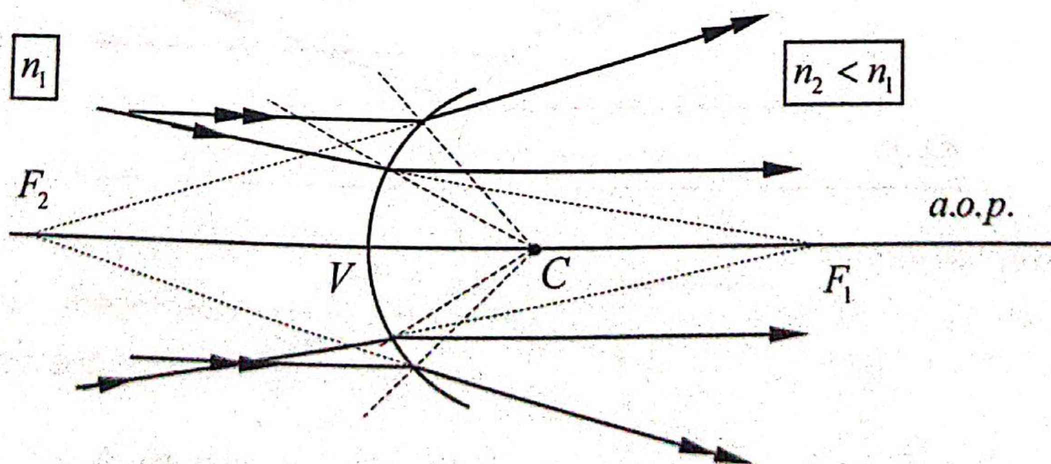


Figura 4.8. Obţinerea focarelor virtuale ($n_2 < n_1$, $R > 0$)

Distanţele focale se obţin din relaţia punctelor conjugate:

- distanţa focală obiect: se pune condiţia ca imaginea să se formeze la infinit:

$$x_2 \to \infty \Rightarrow x_1 \to f_1$$

$$f_1 = \lim_{x_2 \to \infty} x_1 = \lim_{x_2 \to \infty} \frac{x_2 n_1 R}{n_2 R - (n_2 - n_1) x_2} = -\frac{R n_1}{n_2 - n_1}$$

- distanţa focală imagine: se pune condiţia ca obiectul să fie situat la infinit:

$$x_1 \to \infty \Rightarrow x_2 \to f_2$$

$$f_2 = \lim_{x_1 \to \infty} x_2 = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{x_1 n_2 R}{n_1 R + (n_2 - n_1) x_1} = \frac{R n_2}{n_2 - n_1}$$

Observaţii

1. În cazul în care al doilea mediu este mai refringent decât primul, $n_2 > n_1$:

- dacă $R > 0$, atunci $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, adică situaţia din figura 4.7, când focarele sunt reale
- dacă $R < 0$, atunci $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, adică situaţia din figura 4.9, când focarele sunt virtuale

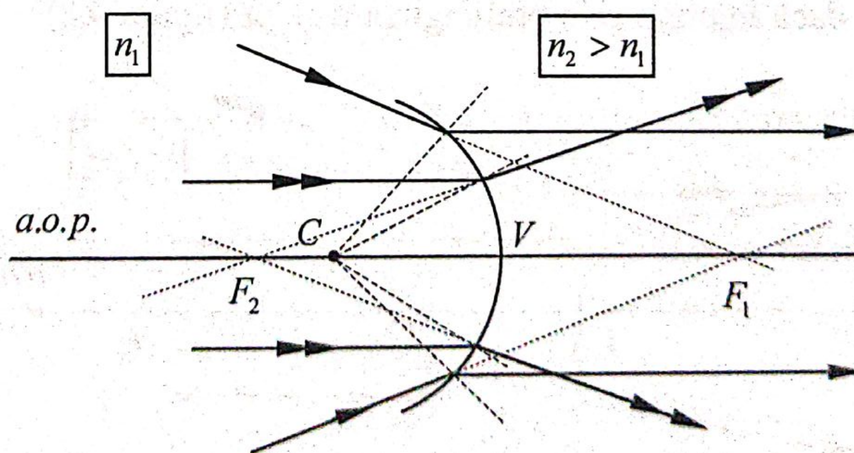


Figura 4.9. Obţinerea focarelor virtuale ($n_2 > n_1$, $R < 0$)

2. În cazul în care al doilea mediu este mai puţin refringent decât primul, $n_2 < n_1$:

- dacă $R > 0$, atunci $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, adică situaţia din figura 4.8, când focarele sunt virtuale
- dacă $R < 0$, atunci $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, adică situaţia din figura 4.10, când focarele sunt reale

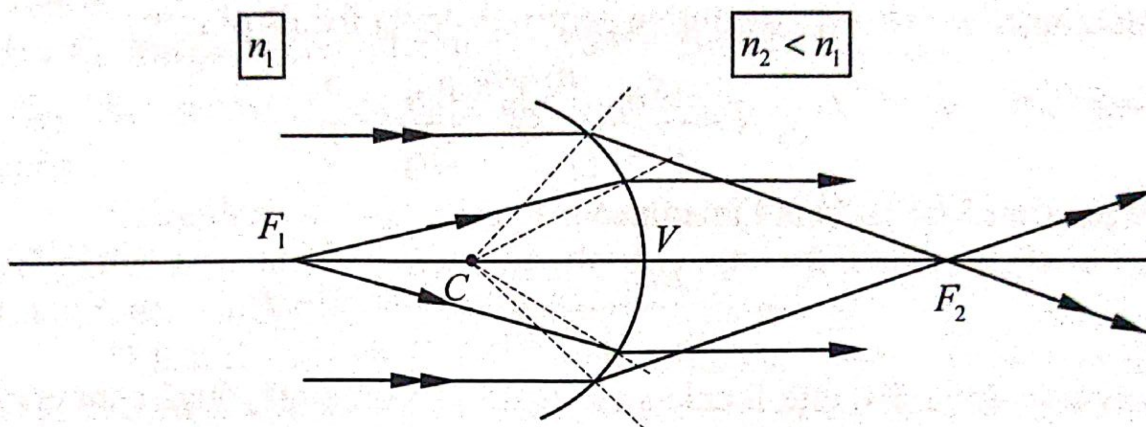


Figura 4.10. Obţinerea focarelor reale ($n_2 < n_1$, $R < 0$)

3. Relaţia punctelor conjugate se poate rescrie folosind expresiile celor două distanţe focale:

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} \quad \Bigg| \cdot \frac{R}{n_2 - n_1}$$

$$1 = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{R n_2}{n_2 - n_1} - \frac{1}{x_1} \cdot \frac{R n_1}{n_2 - n_1}$$

$$\mathbf{\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1}$$

4. Dacă în formulele fundamentale ale dioptrului sferic se consideră că $n_2 = -n_1$, se vor obţine relaţiile caracteristice oglinzilor sferice, aşa cum au fost acestea deduse la momentul respectiv[10]:

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} \overset{n_2 = -n_1}{\Rightarrow} \frac{-2n_1}{R} = -n_1 \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \right) \overset{f = \frac{R}{2}}{\Rightarrow} \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$$

---

[10] $n_2 = -n_1$ înseamnă că lumina se întoarce prin reflexie în mediul din care a venit

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \overset{n_2 \to -n_1}{\Rightarrow} \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{-n_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

5. Dacă în expresiile distanţelor focale ale dioptrului sferic se înlocuieşte n_2 cu $-n_1$, se obţine pentru distanţa focală obiect:

$$f_1 = -\frac{Rn_1}{n_2 - n_1} \overset{n_2=-n_1}{=} \frac{Rn_2}{2n_2} = \frac{R}{2}$$

iar pentru distanţa focală imagine:

$$f_2 \overset{n_2=-n_1}{=} \frac{Rn_2}{n_2 - n_1} = \frac{Rn_2}{2n_2} = \frac{R}{2} = f_1 = f$$

deci cele două distanţe focale sunt egale şi reprezintă, după cum era de aşteptat, chiar distanţa focală a oglinzilor sferice, egală cu jumătate din rază.

4.4. Asociaţii de dioptri sferici. Lentile subţiri

O porţiune dintr-un mediu transparent mărginit de doi dioptri sferici formează o *lentilă sferică*[11] (figura 4.11).

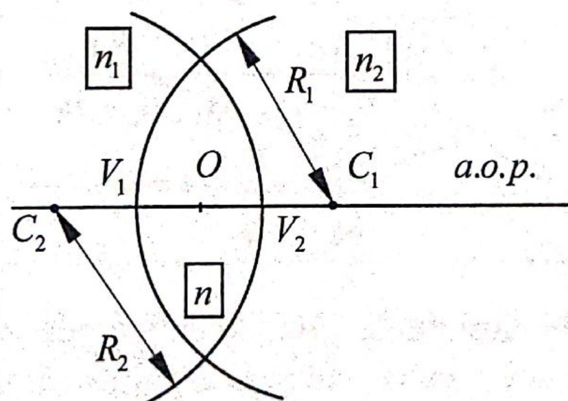


Figura 4.11. Elementele unei lentile sferice

Elementele unei lentile sunt:

- grosimea lentilei, dată de distanţa dintre vârfurile dioptrilor sferici care alcătuiesc lentila, $d = V_1V_2$

[11] În cele ce urmează, prin termenul „lentilă" se va desemna doar lentila sferică

- centrele de curbură C_1 şi C_2 ale celor doi dioptri
- centrul optic al lentilei, O, situat la intersecţia lentilei cu axa optică principală
- axa optică principală a lentilei, C_1C_2, care trece prin centrul optic al acesteia;
- V_1, V_2: vârfurile celor doi dioptri care mărginesc lentila
- R_1, R_2: razele de curbură ale suprafeţelor sferice care mărginesc lentila

Orice dreaptă care trece prin centrul optic al lentilei, cu excepţia axei optice principale, poartă numele de *axă optică secundară*; există, prin urmare, o infinitate de axe optice secundare.

O lentilă este considerată *subţire* atunci când grosimea sa este mică în comparaţie cu razele de curbură ale dioptrilor sferici care o delimitează. Punctele V_1 şi V_2 vor coincide, practic, cu centrul optic al lentilei.

Lentilele se pot clasifica în:
- lentile *convergente*, care transformă un fascicul incident paralel într-un fascicul convergent; ele au marginea subţire şi mijlocul gros şi se împart în biconvexe, plan-convexe şi menisc convergent (figura 4.12)

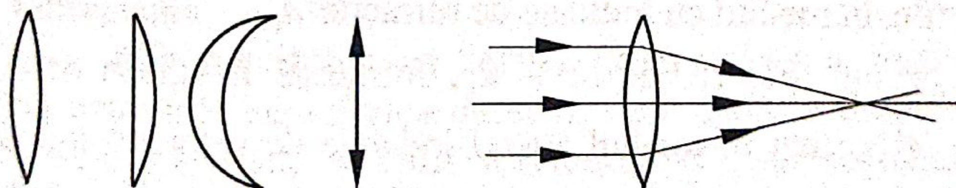


Figura 4.12. Lentila convergentă

- lentile *divergente*, care transformă un fascicul incident paralel într-un fascicul divergent; ele au marginea groasă şi mijlocul subţire şi se împart în biconcave, plan-concave şi menisc divergent (figura 4.13).



Figura 4.13. Lentila divergentă

4.4.1. Formarea imaginilor în lentila subţire

Fiind mărginită de doi dioptri sferici, refracţia luminii într-o lentilă poate fi studiată ca o succesiune de două refracţii pe cei doi dioptri (figura 4.14).

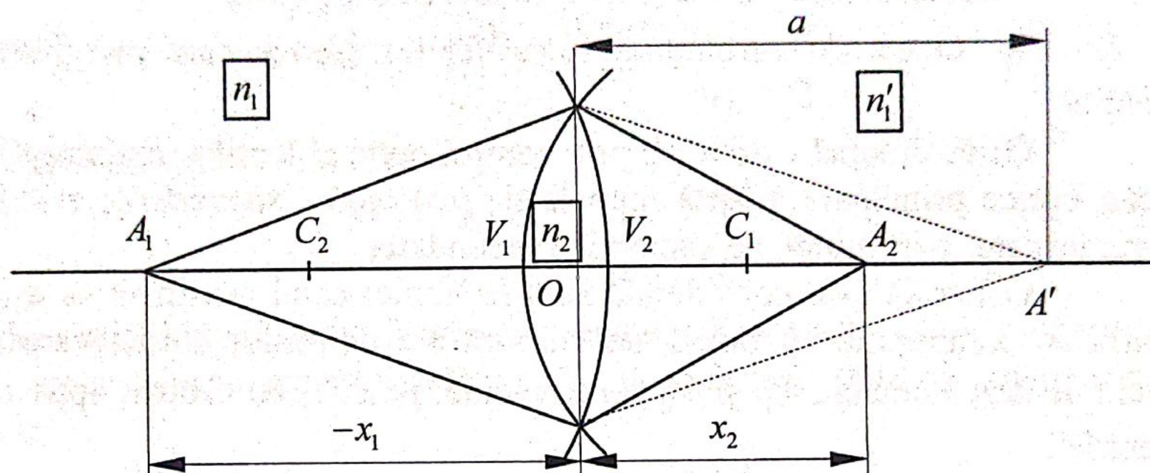


Figura 4.14. Refracţia luminii printr-o lentilă

Fie A_1 un obiect punctiform, situat pe axa optică principală a unei lentile, în mediul cu indicele de refracţie n_1.

Primul dioptru, de rază R_1, formează imaginea obiectului în punctul A', situat în mediul având indicele de refracţie n_2. Imaginea A' este preluată ca obiect de cel de-al doilea dioptru, având raza de curbură $-R_2$. A' devine astfel o imagine intermediară, imaginea sa în al doilea dioptru formându-se în A_2, acesta devenind imaginea finală a obiectului prin sistemul considerat.

Pentru primul dioptru se poate scrie relaţia:

$$\frac{n_2}{a} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

În cazul celui de-al doilea dioptru, obiectul (imaginea intermediară A') se află în mediul având indicele de refracţie n_2, imaginea finală formându-se în mediul cu indicele de refracţie n_1'. Rezultă:

$$\frac{n_1'}{x_2}-\frac{n_2}{a}=\frac{n_1'-n_2}{R_2}$$

De regulă, mediile din stânga, respectiv din dreapta lentilei, sunt identice, deci se poate scrie:

$$n_1 = n_1'$$

Adunând relaţiile obţinute pentru cei doi dioptri, rezultă:

$$\frac{n_1}{x_2}-\frac{n_1}{x_1}=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Se notează:

$$\frac{n_2}{n_1}=n_{21}=n$$

şi poartă numele de indice de refracţie relativ al celui de al doilea mediu faţă de primul. Rezultă astfel:

$$\mathbf{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

Relaţia poartă numele de *formula fundamentală a lentilelor subţiri*.

Observaţie

Este utilă precizarea că relaţia de mai sus a fost obţinută respectând convenţia geometrică de semne enunţată la dioptrii sferici. Adaptată la cazul lentilelor subţiri, ea stabileşte că toate segmentele de-a lungul axei optice principale, care au un capăt în centrul optic al lentilei, se măsoară pornind de la acesta:

- spre dreapta (în sensul propagării luminii), caz în care sunt pozitive
- spre stânga şi atunci sunt negative

Pe verticală, segmentele se măsoară de la axa optică principală în sus şi atunci vor fi considerate pozitive sau în jos, iar atunci vor fi considerate negative.

Distanţele focale ale lentilelor subţiri se definesc ca în cazul dioptrului sferic (figura 4.15).

- *focarul principal obiect* reprezintă locul unde trebuie să fie situat un izvor punctiform, pentru ca razele care provin de la acesta să părăsească lentila paralel cu axul optic principal.

- *focarul principal imagine* reprezintă locul de pe axa optică principală în care se întâlnesc razele emergente provenite de la un fascicul incident parale cu axa optică principală.

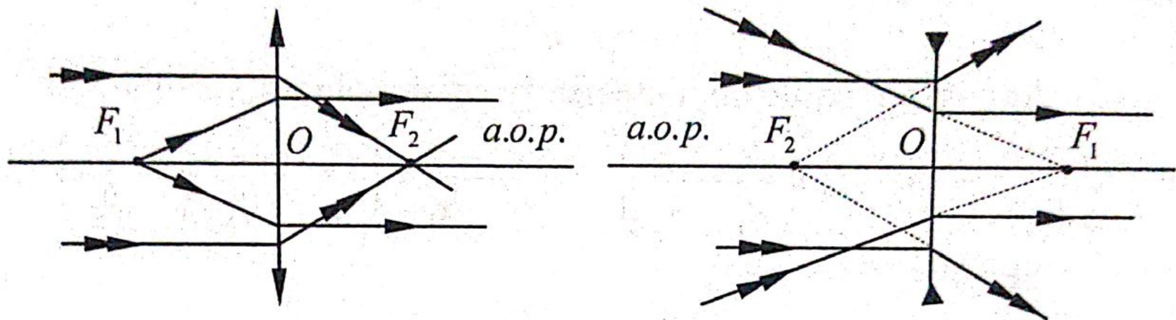


Figura 4.15. Focarele lentilelor subţiri

Planul care trece printr-un focar al lentilei şi este perpendicular pe axa optică principală poartă numele de *plan focal*. Punctele situate în planul focal, care nu sunt focare principale, poartă numele de *focare secundare* (figura 4.16).

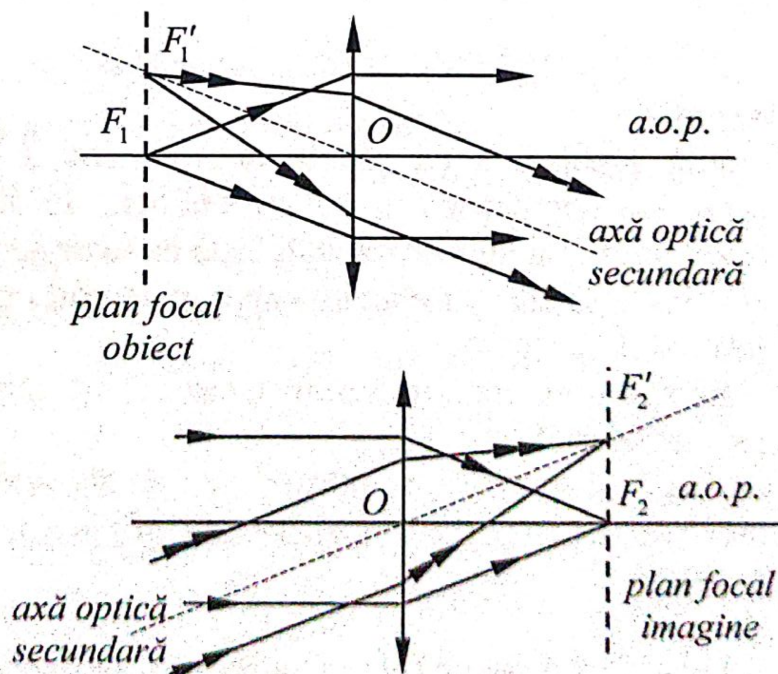


Figura 4.16. Stabilirea poziţiei focarelor secundare

Distanţele focale sunt:

- *distanţa focală obiect*:

$$f_1 = \lim_{x_2 \to \infty} x_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

- *distanța focală imagine*:

$$f_2 = \lim_{x_1 \to \infty} x_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Rezultă că:

$$f_2 = -f_1 = f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

adică focarele sunt aşezate de o parte şi de alta a lentilei, la egală distanţă faţă de aceasta.

Observaţie

Se observă că natura constructivă a lentilelor, reflectată în caracteristica optică de material n_2/n_1 şi în semnul convenţional atribuit razelor R_1 şi R_2, determină natura focarelor sale (reale sau virtuale). Dacă $n_2 > n_1$ (s-a considerat că lentila este mărginită de acelaşi mediu, având indicele de refracţie n_1), situaţia este cea din tabelul 4.1.

Folosind expresiile de mai sus, formula fundamentală a lentilelor subţiri devine:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$$

Raportul

$$\frac{1}{f} = C$$

poartă numele de *convergenţă* sau *putere optică* a lentilei.

$$\langle C \rangle_{SI} = 1m^{-1} = 1\,dioptrie$$

Prin urmare, *o dioptrie* este convergenţa unei lentile având distanţa focală egală cu 1 *m*.

Tabelul 4.1. Reguli de semn pentru lentile subţiri ($n_2 > n_1$)

Nr. crt.	Tipul lentilei		Forma geometrică a lentilei	Semnul razelor	Semnul distanţelor focale	Natura focarelor
1	convergentă	biconvexă		$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
2		plan-convexă		$R_1 \to \infty$ $R_2 < 0$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
				$R_1 > 0$ $R_2 \to \infty$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
3		menisc convergent		$R_1 < 0$ $R_2 < 0$ $\lvert R_2 \rvert < \lvert R_1 \rvert$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale

3		menisc convergent		$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_1 < R_2$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
4	divergentă	biconcavă		$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
5		plan-concavă		$R_1 \to \infty$ $R_2 > 0$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
				$R_1 < 0$ $R_2 \to \infty$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale

6		menisc divergent		$R_1 < 0$ $R_2 < 0$ $\lvert R_2 \rvert > \lvert R_1 \rvert$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
				$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_2 < R_1$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale

Mărirea liniară a unei lentile subţiri se calculează ca raport între mărimea imaginii şi cea a obiectului. Folosind notaţiile din figura 4.17, din asemănarea triunghiurilor ΔA_1B_1O şi ΔA_2B_2O rezultă:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{B_1O}{B_2O} \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2}=\frac{-x_1}{x_2} \Rightarrow \beta=\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1}$$

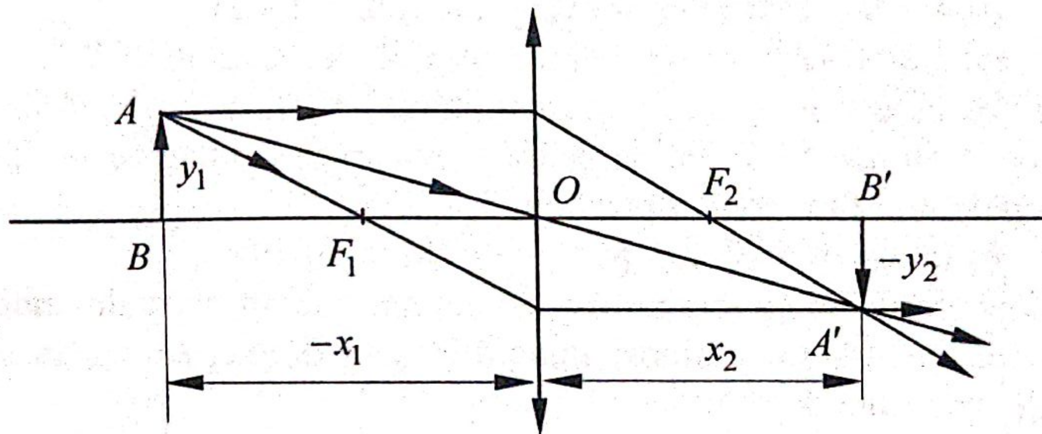


Figura 4.17. Formarea imaginii unui obiect liniar printr-o lentilă convexă

Observaţie

Sunt utile câteva *reguli de construire a imaginilor* prin lentile (figura 4.18):

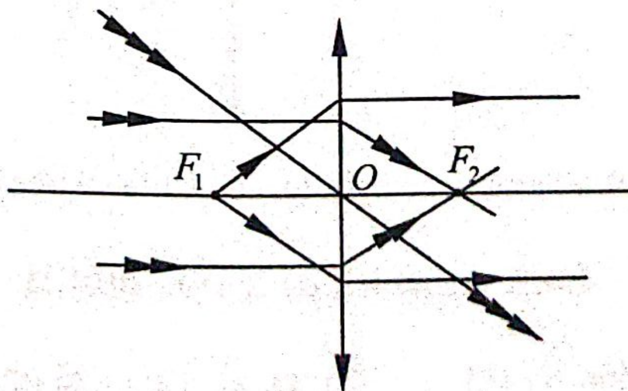


Figura 4.18. Reguli de construire a imaginii printr-o lentilă subţire

- raza incidentă care trece prin focarul obiect părăseşte lentila paralel cu axa optică principală
- raza incidentă paralelă cu axa optică principală, după ce părăseşte lentila, trece prin focarul imagine

- raza incidentă a cărei direcţie trece prin centrul optic al lentilei, se propagă mai departe nedeviată

Observaţii

Folosind regulile de construire a imaginilor în lentile, rezultă următoarele:

a) în cazul lentilelor convergente (tabelul 4.2):

- obiectele situate dincolo de focarul obiect au o imagine reală
- imaginea obiectului situat în focarul obiect se formează la infinit
- obiectele situate între lentilă şi focar vor avea o imagine virtuală (se spune că lentila funcţionează ca şi lupă)

b) în cazul lentilelor divergente (figura 4.19)

- lentilele sferice divergente formează numai imagini virtuale, indiferent de poziţia obiectului luminos; imaginile sunt drepte, situate în spaţiul obiect şi mai mici decât obiectul

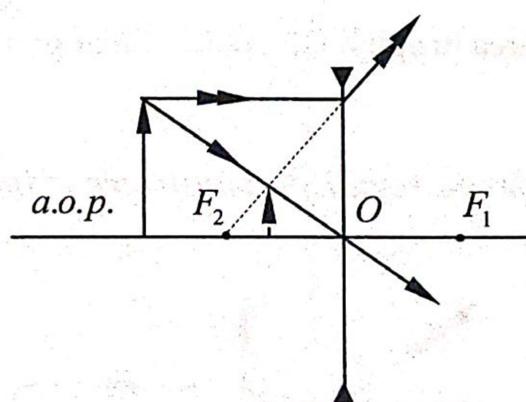


Figura 4.19. Formarea imaginilor în lentila sferică divergentă

4.4.2. Asociaţii de lentile subţiri

Fie două lentile subţiri, care au aceeaşi axă optică şi sunt situate la distanţa d una de alta. Se consideră un obiect liniar A_1B_1, perpendicular pe axa optică principală a sistemului. Imaginea $A_1'B_1'$ a acestuia prin prima lentilă devine obiect pentru cea de a doua, obţinându-se imaginea finală A_2B_2 (figura 4.20).

Cu notaţiile din figură, se poate scrie:

Tabelul 4.2. Formarea imaginilor în lentila convergentă

Nr. crt.	Poziția obiectului	Formarea imaginii	Caracterizarea imaginii
1	- la infinit	F_1 O F_2 *a.o.p.*	- reală - punctiformă (se obține focarul obiect al lentilei)
2	- dincolo de dublul distanței focale	$2F_1$ F_1 O F_2 *a.o.p.*	- reală - răsturnată - mai mică decât obiectul

3	- la dublul distanţei focale	a.o.p. $2F_1$ F_1 O F_2 $2F_2$	- reală - răsturnată - egală ca mărime cu obiectul - situată la dublul distanţei focale faţă de lentilă
4	- între focar şi dublul distanţei focale	$2F_1$ F_1 O F_2 $2F_2$ a.o.p.	- reală - răsturnată - mai mare decât obiectul - situată dincolo de dublul distanţei focale faţă de lentilă

5	- în focarul obiect	F_1 O F_2 a.o.p.	- reală - se formează la infinit - mărime infinită
6	- între lentilă şi focar	F_1 O F_2 a.o.p.	- virtuală - dreaptă - mai mare decât obiectul

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{f_1}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\\ \frac{1}{f_2}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}$$

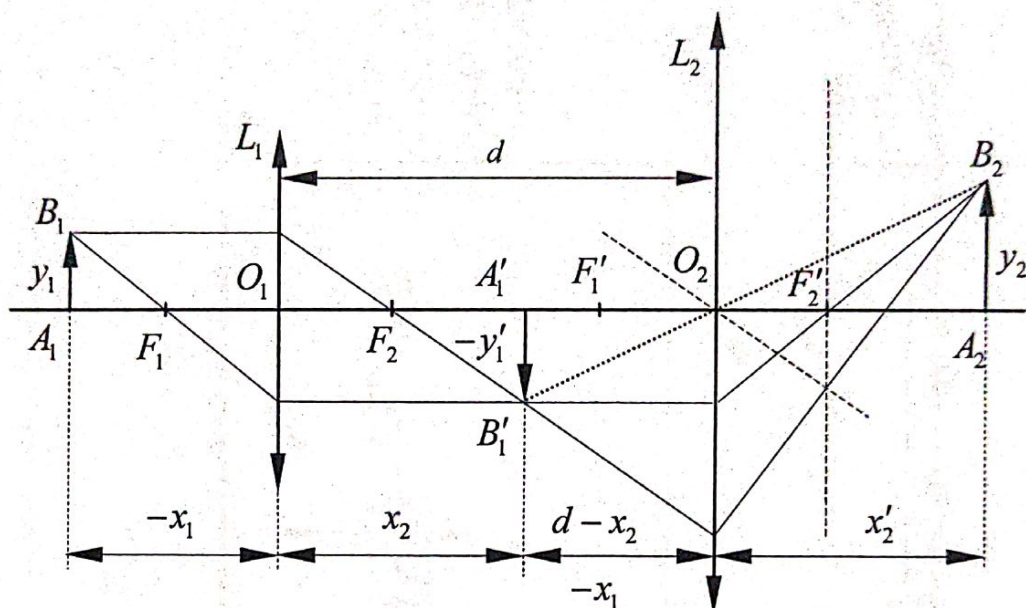


Figura 4.20. Formarea imaginii printr-un sistem de două lentile subţiri

Dar $d=x_2+\left(-x_1'\right)\Rightarrow x_1'=x_2-d$, deci suma convergenţelor devine:

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{d-x_2}$$

Dacă lentilele sunt lipite (*acolate*; $d=0$):

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}$$

Membrul drept cuprinde cele două distanţe conjugate, distanţa sistem-obiect x_1 şi distanţa sistem-imagine, x_2'. Rezultă expresia:

$$\mathbf{\frac{1}{F}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}}$$

Aceasta este *formula punctelor conjugate pentru sistemul de lentile alipite*; convergenţa sistemului este egală cu suma convergenţelor lentilelor componente:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

În cazul unui sistem de n lentile subţiri lipite:

$$\frac{1}{F}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_k}$$

Din figura 4.20 rezultă că:

$$\beta=\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_1'}{y_1}\cdot\frac{y_2}{y_1'}=\beta_1\cdot\beta_2$$

deci mărirea liniară transversală a sistemului este egală cu produsul măririlor liniare ale componentelor sistemului. Generalizând:

$$\beta=\prod_{k=1}^{n}\beta_k$$

Observaţie

Dacă focarul imagine al primei lentile coincide cu focarul obiect al celei de-a doua, sistemul poartă numele de *sistem telescopic* (*afocal*) (figura 4.21): o rază paralelă cu axa optică principală, incidentă pe sistemul de lentile, va părăsi acest sistem paralel cu axa optică.

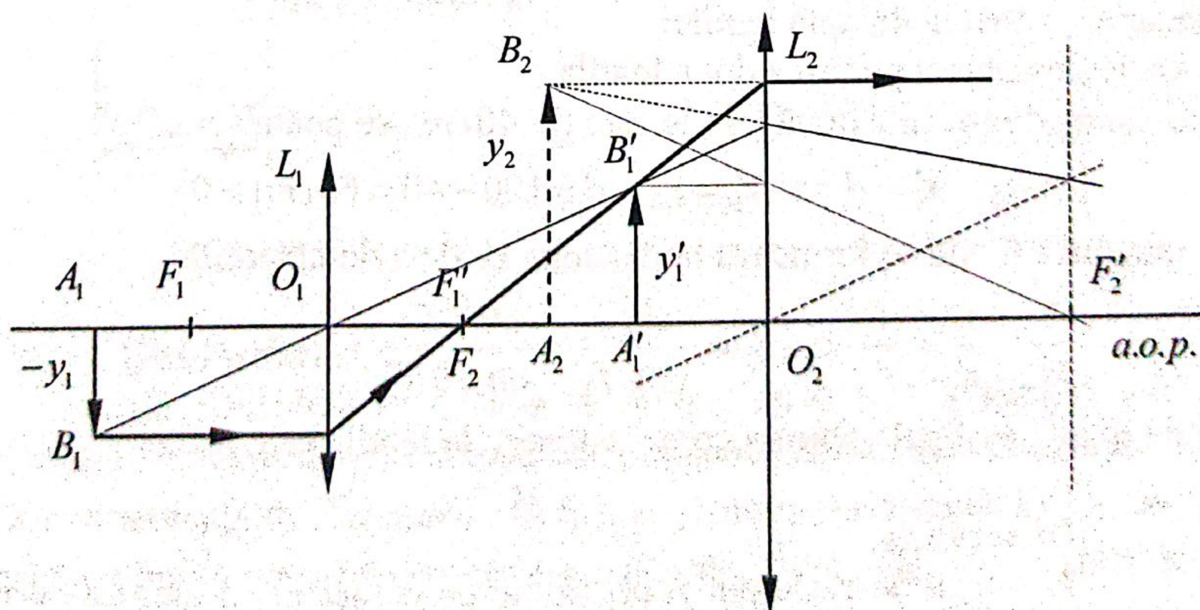


Figura 4.21. Sistem afocal

4.5. Aplicaţii

Problema nr. 1.

Se consideră că un obiect este situat la $25\,cm$ în faţa unei lentile subţiri având convergenţa de $5\,dioptrii$. Să se stabilească unde se formează imaginea finală a acestui obiect, dacă o a doua lentilă, cu distanţa focală de $25\,cm$, este plasată la $40\,cm$ în dreapta primei lentile.

Rezolvare

- formarea imaginii în prima lentilă se descrie cu ajutorul formulei fundamentale a lentilelor subţiri:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f_1}\\ \dfrac{1}{f_1}=C_1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_2}=C_1+\frac{1}{x_1}=\frac{C_1x_1+1}{x_1}$$

$$x_2=\frac{x_1}{C_1x_1+1}=\frac{-25\cdot10^{-2}}{5\cdot\left(-25\cdot10^{-2}\right)+1}=1m=100\,cm(>0)$$

- imaginea formată de prima lentilă este reală şi se formează în spaţiul imagine, situat la dreapta lentilei
- ea devine obiect pentru a doua lentilă
- distanţa dintre cele două lentile este de $40\,cm$; se poate scrie:

$$x_2-x_1'=d \Rightarrow x_1'=x_2-d=100-40=60\,cm(>0)$$

- imaginea finală se formează la distanţa x_2' de a doua lentilă:

$$\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow x_2'=\frac{x_1'f_2}{x_1'+f_2}=\frac{60\cdot25}{60+25}=17{,}64\,cm(>0)$$

deci imaginea finală obţinută prin sistemul de lentile este reală

Observaţie

1. Imaginile reale pot fi prinse pe un ecran; acest lucru nu este posibil în cazul imaginilor virtuale.

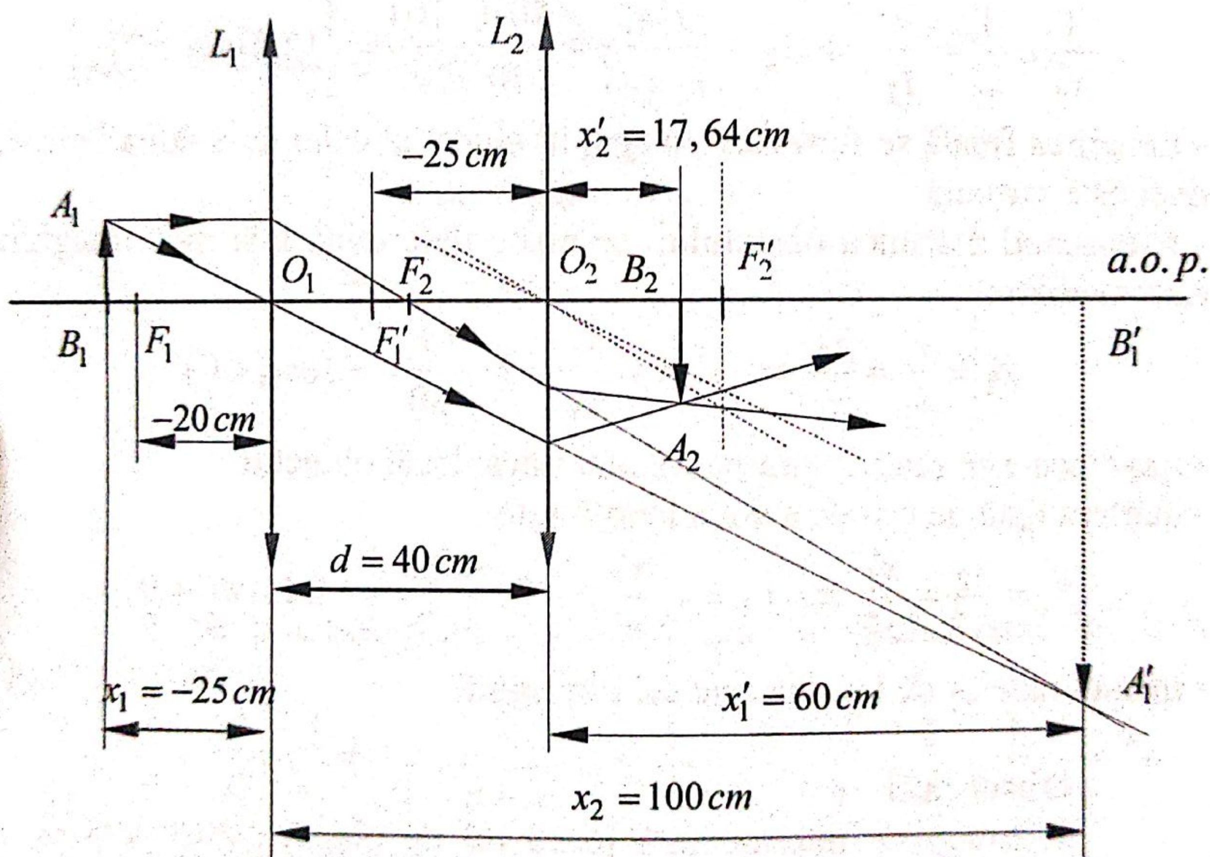
2. Se pot folosi rezultatele obţinute la studiul asociaţiilor de lentile subţiri:

$$\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{d-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2'}=\frac{1}{f_2}+C_1+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{d-x_2}$$

$$\frac{1}{x_2'}=\frac{1}{25\cdot 10^{-2}}+5+\frac{1}{-25\cdot 10^{-2}}-\frac{1}{1}-\frac{1}{40\cdot 10^{-2}-1}=4+5-4-1+\frac{1}{0,6}$$

$$x_2'=\frac{3}{17}m=\frac{300}{17}cm=17,64\,cm$$

- mersul razelor de lumină este cel din figura de mai jos:



Problema nr. 2.

Se consideră un sistem alcătuit dintr-o lentilă subțire, având distanța focală de $10\,cm$, situată la distanța de $25\,cm$ de o a doua lentilă, cu convergența de $2\,dioptrii$. În fața sistemului, la distanța de $30\,cm$ de prima lentilă, se află un obiect înalt de $2\,cm$. Să se caracterizeze imaginea formată de sistem.

Rezolvare

- imaginea formată de prima lentilă joacă rol de imagine intermediară

- ea se formează la distanţa x_2 de aceasta:

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2=\frac{f_1 x_1}{f_1+x_1}=\frac{10\cdot(-30)}{10-30}=15\,cm$$

- imaginea intermediară este situată la distanţa x_1' de a doua lentilă:

$$d=x_2+(-x_1') \Rightarrow x_1'=x_2-d=15-25=-10\,cm(<0)$$

deci în faţa acesteia

- imaginea finală se formează la distanţa x_2' de a doua lentilă:

$$\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow x_2'=\frac{f_2 x_1'}{f_2+x_1'}=\frac{50\cdot(-10)}{50-10}=-12{,}5\,cm(<0)$$

- imaginea finală se formează în spaţiul obiect al celei de a doua lentile, deci este virtuală
- cunoscând mărimea obiectului, se poate determina mărimea imaginii intermediare:

$$\beta_1=\frac{y_1'}{y_1}=\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_1'=y_1\frac{x_2}{x_1}=2\cdot\frac{15}{-30}=-1\,cm(<0)$$

- imaginea este reală (răsturnată), mai mică decât obiectul
- mărirea dată de cea de a doua lentilă este:

$$\beta_2=\frac{y_2}{y_1'}=\frac{x_2'}{x_1'} \Rightarrow y_2=y_1'\frac{x_2'}{x_1'}=-1\cdot\frac{-12{,}5}{-10}=-1{,}25\,cm(<0)$$

- mersul razelor de lumină este cel din figură

Observaţii

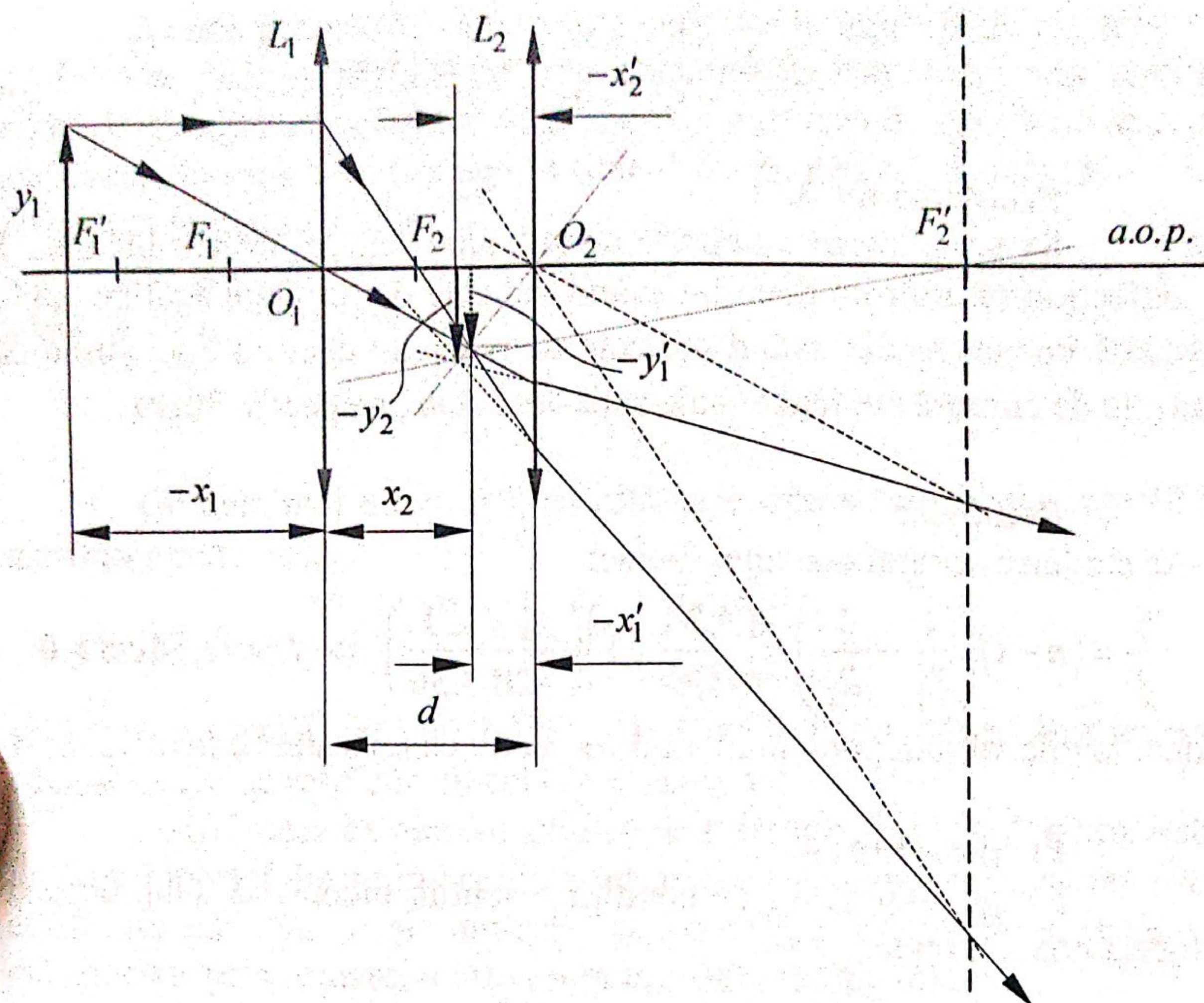
1. Imaginea intermediară joacă rol de obiect pentru cea de a doua lentilă a sistemului; ea este situată în spaţiul obiect al lentilei.

Imaginea finală se formează tot în spaţiul obiect al celei de a doua lentile, deci este virtuală.

Dacă se determină distanţa focală a lentilei:

$$f_2=\frac{1}{C_2}=\frac{1}{2}=0{,}5\,m=50\,cm$$

rezultă că imaginea intermediară se formează între a doua lentilă şi focarul acesteia, deci imaginea finală trebuie să fie virtuală !



2. Se pot folosi rezultatele obţinute la studiul asociaţiilor de lentile subţiri:

$$\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{d-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2'}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{d-x_2}$$

de unde, prin înlocuire, se obţine:

$$x_2'=-12{,}5\,cm$$

3. Mărimea imaginii se putea determina folosind mărirea liniară a sistemului, β :

$$\left.\begin{aligned} &\beta=\beta_1\cdot\beta_2=\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_2'}{x_1'} \\ &\beta=\frac{y_2}{y_1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_2'}{x_1'} \Rightarrow y_2=y_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_2'}{x_1'}$$

$$y_2 = 2 \cdot \frac{15}{-30} \cdot \frac{-12,5}{-10} = -1,25\,cm$$

Problema nr. 3.

Să se studieze comportamentul unei lentile sferice biconcave confecţionată dintr-un material având indicele de refracţie egal cu $1,34$, situată într-un mediu având indicele de refracţie egal cu $1,6$, ştiind că razele de curbură ale feţelor sale sunt de $20\,cm$, respectiv $30\,cm$.

Rezolvare

- se studiază semnul distanţei focale:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{1,34}{1,6} - 1\right)\left(\frac{1}{-20} - \frac{1}{30}\right) \Rightarrow f = 73,84\,cm > 0$$

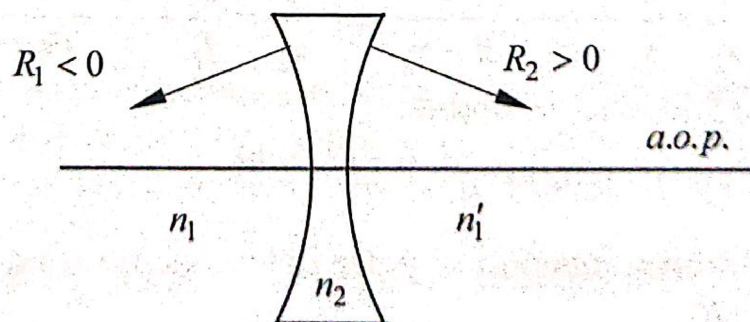
deci lentila va funcţiona în mediul respectiv ca un sistem convergent.

Problema nr. 4.

Să se studieze în ce condiţii o lentilă biconcavă subţire poate forma imagini reale.

Rezolvare

Forma geometrică a unei lentile biconcave este cea din figura de mai jos:



De regulă, când se vorbeşte despre o lentilă biconcavă, aceasta este percepută ca o lentilă divergentă, care formează numai imagini virtuale, deci cerinţa problemei pare absurdă. Dar, dacă ne gândim mai atent la ceea ce înseamnă o lentilă, vom constata că ea există numai pentru că este un mediu optic transparent cu alte proprietăţi optice decât cele ale mediilor (tot optic transparente !) care o mărginesc.

Aceste proprietăţi optice sunt cuprinse în indicele de refracţie al mediilor respective. Cu alte cuvinte, dacă mediile care mărginesc lentila au acelaşi indice de refracţie ca şi aceasta, noţiunea de lentilă nu ar mai avea sens, lumina s-ar propaga în linie dreaptă, nedeviată, fără să sufere refracţiile pe feţele lentilei.

Se ştie că distanţa focală a unei lentile sferice subţiri poate fi descrisă cu ajutorul expresiei:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

De cele mai multe ori, se uită care este semnificaţia corectă a mărimii notate cu „n":

$$n=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}=\frac{n_{lentil\breve{a}}}{n_{mediu\ exterior}}$$

şi aceasta în cazul cel mai fericit, când mediul din stânga lentilei are acelaşi indice de refracţie cu cel din dreapta sa!

Astfel, ceea ce numim „indice de refracţie al lentilei" reprezintă, de fapt, raportul dintre indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lentila şi indicele de refracţie al mediului care o mărgineşte; prin urmare, n este un indice de refracţie relativ.

Desigur că, dacă lentila este plasată în aer, lucrurile devin mai simple şi se susţine denumirea de „indice de refracţie al lentilei", aerul având indicele de refracţie foarte apropiat de unitate, motiv pentru care folosim $n_{aer}=1$.

Ţinând cont de cele expuse mai sus, analizând cerinţa problemei, pentru ca lentila să fie biconcavă şi să formeze imagini reale, ea trebuie să prezinte o distanţă focală pozitivă:

$$\frac{1}{f}>0 \Rightarrow (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)>0$$

Deoarece lentila este biconcavă:

$$\left.\begin{array}{l} R_1<0 \Rightarrow \dfrac{1}{R_1}<0 \\ R_2>0 \Rightarrow \dfrac{1}{R_2}>0 \Rightarrow -\dfrac{1}{R_2}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}<0$$

deci condiţia ca ea să formeze imagini reale devine:

$$n-1<0 \Rightarrow n<1$$

ceea ce pare absurd la prima vedere, pentru că indicele de refracţie al unui mediu optic transparent trebuie să fie mai mare decât unitatea, sau măcar egal cu aceasta (şi în acest caz vorbim despre aer sau vid!). Aici intervine, însă, semnificaţia simbolului „n”, aşa cum a fost ea prezentată înainte:

$$n=\frac{n_{lentilă}}{n_{mediu}}<1 \Rightarrow n_{lentilă}<n_{mediu}$$

$$n_2<n_1$$

deci materialul lentilei trebuie să fie mai puţin dens decât mediul în care este aceasta plasată

Observaţii

1. Cazurile comune de utilizare a lentilelor presupun faptul că lentila este situată în aer, deoarece acest lucru. Astfel, când aceasta are formă biconcavă, se consideră implicit că este divergentă, pentru că ea are comportament de sistem optic divergent ! Cu toate acestea, se observă că este util să i se dea atenţie şi mediului în care este ea amplasată, pentru că şi acesta îi influenţează comportamentul.

2. Este tentant să spunem că dorim ca lentila biconcavă discutată mai sus să aibă un comportament de lentilă convergentă. Dar ce este o lentilă convergentă şi care sunt factorii care îi influenţează comportamentul ?

Problema nr. 5.

Într-o piesă confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie egal cu 1,5 se află o incluziune lichidă, de forma unei lentile sferice biconvexe, având razele de curbură de $20\,cm$, respectiv $40\,cm$. Să se determine indicele de refracţie al materialului lichid, dacă incluziunea permite formarea de imagini reale ale obiectelor. Cum se comportă incluziunea, dacă lichidul este apa ($n_{apă}=4/3$) ? Ce s-ar întâmpla dacă ar fi vorba despre o incluziune de aer ?

Rezolvare

- deoarece incluziunea poate forma imaginea reală a obiectelor, ea se comportă ca un sistem convergent, deci distanţa sa focală trebuie să fie pozitivă:

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)>0$$

unde n_1 este indicele de refracţie al mediului care mărgineşte lentila, iar n_2 este indicele de refracţie al materialului din care este aceasta confecţionată

$$\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\left(\frac{n_2}{1,5}-1\right)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{-40}\right)=\frac{n_2-1,5}{1,5}\cdot\frac{2+1}{40}>0$$

$$n_2-1,5>0 \Rightarrow n_2>1,5$$

- prin urmare, lichidul trebuie să aibă un indice de refracţie mai mare de 1,5
- dacă lichidul este apa, situaţia este următoarea:

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\left(\frac{\frac{4}{3}}{1,5}-1\right)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{-40}\right)=-\frac{1}{120}$$

$$f=-120\,cm$$

deci incluziunea de apă, biconvexă, se comportă ca o lentilă divergentă !
- situaţia este aceeaşi şi dacă ar fi vorba despre o incluziune de aer:

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\left(\frac{1}{1,5}-1\right)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{-40}\right)=-\frac{1}{40}$$

$$f=-40\,cm$$

Observaţie

„Calitatea" de lentilă sferică convergentă sau divergentă este dată nu numai de aspectul geometric al acesteia, ci şi de natura materialului lentilei şi a mediului care o mărgineşte !

CAPITOLUL 5. INSTRUMENTE OPTICE

Instrumentele optice sunt asociaţii de sisteme optice cu ajutorul cărora se obţin imagini ale unor obiecte. În funcţie de natura imaginii obţinute, ele se pot grupa în două mari categorii: cu imagini reale (ochiul, aparatul fotografic, aparatul de proiecţie, etc.), respectiv cu imagini virtuale (lupa, microscopul, luneta, etc.)

Caracteristicile principale ale unui astfel de instrument sunt mărirea liniară şi cea unghiulară, puterea de separaţie, respectiv capacitatea de a obţine imagini distincte ale unor puncte apropiate, câmpul, adică partea din spaţiul obiect ale cărui puncte se observă prin instrument, luminozitatea.

5.1. Mărire liniară, grosisment, putere

Orice instrument optic poate fi caracterizat prin câteva mărimi care îi descriu proprietăţile: mărirea liniară, grosismentul, puterea.

Mărirea liniară caracterizează instrumentul care dă imagini reale ale unui obiect şi se defineşte prin raportul:

$$m = \frac{y_2}{y_1}$$

Grosismentul (mărirea unghiulară) caracterizează instrumentele care dau imagini virtuale şi se defineşte ca raportul dintre tangenta unghiului sub care se vede imaginea şi tangenta unghiului sub care se vede obiectul privit cu ochiul liber:

$$G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}$$

Puterea unui instrument optic se defineşte ca tangenta unghiului sub care se vede unitatea de lungime privită prin instrument:

$$P = \frac{tg\alpha_2}{y_1}$$

Observaţie

Dacă obiectul se găseşte la distanţa minimă de vedere distinctă, L, unghiul sub care se vede acesta cu ochiul liber este (figura 5.1):

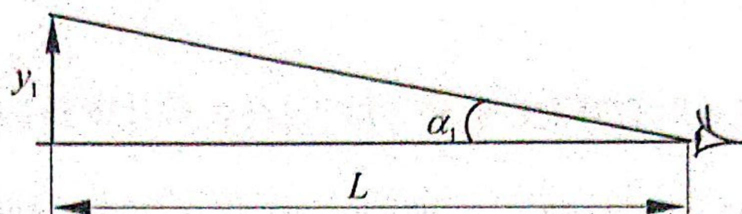


Figura 5.1. Parametrii de observare a unui obiect cu ochiul liber

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{L}$$

de unde rezultă:

$$G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2 \frac{L}{y_1} = PL$$

relaţie care exprimă legătura dintre putere şi grosisment.

5.2. Instrumente optice cu imagine reală

Instrumentele optice cu imagine reală formează o imagine ce poate fi „prinsă" pe un ecran, plasat în planul de convergenţă al razelor. Acesta poate fi un film fotografic (o placă fotografică) sau însăşi retina ochiului, atunci când vederea este directă.

5.2.1. Ochiul

Anatomic vorbind, ochiul este un organ complex, servind la transformarea imaginilor geometrice ale corpurilor în senzaţii vizuale.

Din punctul de vedere al opticii geometrice, el constituie un sistem optic format din trei medii transparente: *umoarea apoasă*, *cristalinul* şi *umoarea sticloasă* (*vitroasă*). Acestea se găsesc în interiorul globului ocular, mărginit în exterior de o membrană rezistentă, numită *sclerotică*. Sclerotica este opacă peste tot, exceptând o porţiune din faţă, transparentă şi de formă sferică, numită *corneea transparentă*. Lumina pătrunde în ochi prin cornee, străbate celelalte trei medii transparente şi cade pe retină, unde se formează imaginea reală şi răsturnată a obiectelor privite. În figura 5.2 sunt precizate detaliile geometriei sale.

Figura 5.2. Caracteristicile ochiului uman văzut ca sistem optic complex

Fluxul luminos este reglat automat prin acţiunea involuntară (reflexă) a *irisului*. Acesta este o membrană (ai cărei pigmenţi dau culoarea ochilor) perforată în centru de o deschidere circulară, de diametru variabil, numită *pupilă*. La lumină prea intensă, irisul îşi micşorează pupila pentru a proteja retina, iar la lumină prea slabă, irisul îşi măreşte pupila pentru a mări iluminarea imaginii de pe retină.

Retina este o membrană subţire, alcătuită din prelungirile nervului optic şi conţinând un mare număr de celule senzoriale care percep lumina, numite *conuri* şi *bastonaşe*.

Conurile sunt celule specializate în perceperea luminii intense din timpul zilei, fiind capabile să dea senzaţii diferite pentru diferite culori. Bastonaşele sunt specializate în perceperea luminii de intensitate slabă, fiind practic incapabile să distingă culorile. Ochiul omenesc conţine aproximativ 7 milioane de conuri şi 130 de milioane de bastonaşe, foarte neuniform răspândite. Conurile ocupă mai ales partea centrală a retinei, în timp ce densitatea bastonaşelor creşte spre periferie.

În partea centrală, puţin mai sus de axa optică, există o regiune numită *pata galbenă* (macula lutea) în mijlocul căreia se află o mică adâncitură – *foveea centralis* – populată excesiv de conuri, în număr de 13000-15000. Sub acţiunea involuntară a unor muşchi speciali ai ochiului, globul ocular suferă mişcări de rotaţie în orbita sa, astfel încât imaginea sa să se formeze întotdeauna în regiunea petei galbene, cea mai importantă regiune fotosensibilă a ochiului. Pe pata galbenă avem un număr maxim de conuri pe unitatea de suprafaţă. În jurul punctului de intrare al nervului optic în globul ocular, nu se găsesc nici conuri, nici bastonaşe. Bastonaşele sunt mai sensibile la lumină decât conurile. În schimb, conurile sunt sensibile la lungimea de undă. De aceea la crepuscul (iluminare inferioară valorii de 0,01 *lux*), nu se văd imagini colorate, acestea începând să fie percepute numai de la iluminări superioare unui *lux*. La iluminări superioare valorii de $10^2 - 10^3$ *lux*, vizibilitatea este asigurată exclusiv de conuri. Conurile şi bastonaşele conţin *iodopsină* şi *rodopsină* care se modifică fotochimic sub acţiunea luminii, energia astfel eliberată excitând nervul optic de care este legată celula şi astfel impulsul nervos se transmite la creier.

Cristalinul are forma unei lentile nesimetric biconvexe şi poate fi mai bombat sau mai puţin bombat sub acţiunea reflexă a muşchilor ciliari, modificându-şi astfel convergenţa, încât imaginea să cadă pe

retină. El are o structură stratificată, prezentând spre margine indicele de refracţie de aproximativ 1,38, iar în interior de aproximativ 1,41.

5.2.1.1. Aspecte generale

Modelul ochiului sferic are limitările sale.

Lumina pătrunde în ochi prin cornee, care este un strat transparent având grosimea de 0,5 *mm* şi indicele de refracţie egal cu 1,377. Apoi, trece prin camera anterioară, care are un indice de refracţie mai mic, de 1,336. Grosimea aceste părţi frontale apoase este de 3,04 *mm* şi se termină la planul irisului şi al lentilei ochiului.

Lentila ochiului are o formă variabilă şi îşi modifică puterea refractivă (convergenţa), astfel încât ochiul se poate acomoda la un obiect aflat la o anumită distanţă. Lentila ochiului este alcătuită din mai multe straturi, dar, într-o primă aproximaţie, nu prezintă interes decât un singur mediu optic, în vreme ce modele mai amănunţite iau în considerare o lentilă nucleu cristalină şi o capsulă care înglobează această lentilă.

În spatele lentilei, lumina trece prin umoarea vitroasă şi este receptată de către retină, unde are loc detectarea luminii.

În tabelul 5.1, corelat cu figura 5.2, pot fi urmărite cele mai importante date optice privind ochiul uman; se face distincţie între ochiul relaxat, pentru obiecte situate la infinit şi cel acomodat (stare de focalizare).

Aproximativ două treimi din puterea refractivă a ochiului uman este localizată în suprafaţa frontală a corneei, care prezintă o diferenţă de indice de refracţie de 0,377 faţă de aer în partea frontală, iar o treime este localizată în lentila cristalinului, care prezintă doar o diferenţă de 0,08 faţă de camera vitroasă şi umoarea vitroasă.

Dacă se plasează ochiul în apă, având indicele de refracţie 4/3, indicele de refracţie relativ al corneei faţă de mediul înconjurător se reduce de 7 ori. Din acest motiv, imaginea se formează departe de retină şi apare înceţoşată.

Corneea contribuie cel mai mult la puterea refractivă a ochiului. Forma sa asferică în zona exterioare contribuie la reducerea aberaţiilor unei pupile cu un diametru mare.

Tabelul 5.1. Parametrii optici principali ai ochiului uman

Nr. crt.	Proprietăţi	Ochi relaxat	Ochi acomodat
1	Putere refractivă (convergenţă)	58,63 *dioptrii*	70,57 *dioptrii*
2	Distanţă focală în aer	17,1 *mm*	14,2 *mm*
3	Putere refractivă a lentilei cristalinului	19 *dioptrii*	33 *dioptrii*
4	Câmp vizual - maxim	108°	
5	Câmp vizual - fovea	5°	
6	Diametrul pupilei	2 - 8 *mm*	
7	Diametrul globului ocular	24 *mm*	
8	Distanţa de la vertexul frontal la punctul nodal *N*	7,33 *mm*	
9	Distanţa de la vertexul frontal la punctul principal *P*	1,6 *mm*	
10	Distanţa de la vertexul frontal la pupila de intrare	3,0 *mm*	

Acomodarea

Un ochi normal, aflat în stare de repaus, are focarul situat pe retină (figura 5.3). Din această cauză, pentru obiectele situate la infinit (practic, la distanţe mai mari decât cca. 15 *m*) ochiul formează imaginile pe retină fără nici un efort de modificare a convergenţei cristalinului.

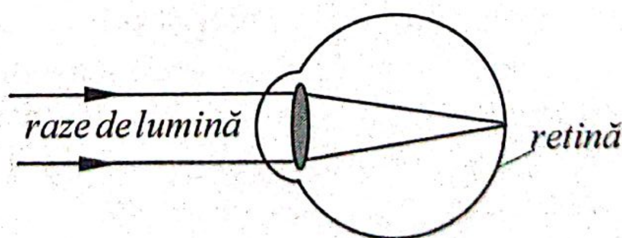


Figura 5.3. Formarea imaginii pe retina ochiului emetrop

Apropiind obiectul, cristalinul se bombează sub acţiunea muşchilor ciliari, astfel încât imaginea să rămână tot pe retină. Fenomenul se numeşte *acomodare*.

Acomodarea ochiului se defineşte ca procesul de adaptare a lentilei-cristalin, pentru a forma pe lentilă imaginile obiectelor situate la

diferite distanțe față de ochi. Pe măsură ce obiectul se apropie de ochi, cristalinul se bombează tot mai tare, iar distanța sa focală scade.

Cristalinul însă nu se poate bomba oricât și de aceea obiectul poate fi adus doar până la o anumită distanță minimă – distanța minimă de vedere – sub care ochiul nu mai poate forma imaginea pe retină. Acomodarea ochiului este deci posibilă între un punct aflat la o distanță maximă (*punctum remotum*), care pentru ochiul normal este la infinit (practic, peste 15 *m*) și un punct aflat la o distanță minimă (*punctum proximum*), care pentru ochiul normal este de 10-15 *cm* la tineri și aproximativ 25 *cm* la adulți. Intervalul dintre cele două puncte se numește *câmp de acomodare*.

Se definește *puterea de acomodare* a cristalinului ca fiind diferența dintre puterea maximă și cea minimă a lentilei-cristalinului; prin urmare, ea reprezintă variația maximă a puterii lentilei cristalinului. Puterea de acomodare a cristalinului se măsoară în dioptrii (m^{-1}).

În mod normal, ochiul vede cel mai bine, putând distinge cele mai multe detalii, la o distanță mai mare decât distanța minimă de vedere și anume 25 *cm*, numită și *distanța vederii optime*.

Două puncte luminoase sunt văzute distinct dacă distanța lor unghiulară este superioară unei anumite limite. S-a constatat că limita aceasta pentru un ochi normal este de un minut de arc, ceea ce corespunde pe retină formării imaginii punctelor pe două conuri alăturate.

Acomodarea se exprimă prin *amplitudinea dioptrică a câmpului de vedere*, numită și *amplitudine de acomodare a ochiului*, *A*:

$$A = \frac{1}{s_m} - \frac{1}{s_M}$$

unde s_m este distanța la care se află punctum proximum față de vârful corneei (exprimată în *m*), iar s_M este distanța la care se află punctum remotum față de vârful corneei (exprimat în *m*).

Amplitudinea de acomodare scade odată cu înaintarea în vârstă, punctum proximum se îndepărtează tot mai mult, iar ochiul devine *prezbit*.

Adaptarea ochiului

Ochiul omului poate percepe fluxuri luminoase cuprinse într-un interval foarte larg: raportul dintre intensitatea luminoasă maximă (în

prag de durere) şi intensitatea luminoasă minimă ce poate fi percepută este de ordinul 10^6. Pentru a putea percepe lumină în tot acest interval, fără leziuni ale sistemului nervos, au loc procese mecanice şi fiziologice de adaptare.

În cazul adaptării mecanice, diametrul irisului se schimbă aproape spontan (câteva secunde). Diametrul pupilei în cazul ochiului tânăr variază între 2,5 şi 8 *mm*, dar o dată cu înaintarea în vârstă, diametrul maxim scade. Din această cauză, ochiul devine mai puţin sensibil la intensităţi luminoase mai mici.

Pe lângă adaptarea mecanică, are loc şi o adaptare fiziologică (prin schimbarea sensibilităţii ochiului), ce decurge mult mai lent decât cea mecanică.

Sensibilitatea la culori

Teoria observării culorilor a lui Young-Helmholtz porneşte de la faptul experimental că orice culoare poate fi obţinută din amestecul culorilor fundamentale, roşu, verde şi albastru. Pe baza acestei observaţii s-a postulat că există trei tipuri de receptori (conuri) de sensibilitate spectrală diferită corespunzătoare celor trei tipuri de culori. Prin amestecarea semnalelor venite de la aceşti receptori se percepe în final, psihologic, orice culoare.

Sensibilitatea ochiului la diferite lungimi de undă este caracterizată prin *curba de sensibilitate*. Maximul se obţine pentru culoarea galben-verde de aproximativ 5550 *Å* în vederea diurnă şi 5100 *Å* în vederea crepusculară. Efectul de deplasare a maximelor în funcţie de iluminare se numeşte *efect Purkinje*. Domeniul undelor electromagnetice pentru care ochiul este sensibil şi, deci, constituie domeniul vizibil, este cuprins între 4000 *Å* şi 7600 *Å*. Se observă de asemenea că vizibilitatea variază mult cu lungimea de undă.

Când se trece de la lumină la întuneric, sensibilitatea ochiului este mică. După câteva minute, ca efect al adaptării conurilor, respectiv bastonaşelor, ea creşte cam de $10^3 - 10^4$ ori.

Deoarece sensibilitatea în cazul vederii diurne este mare la lumina verde, se obişnuieşte să se folosească acest tip de lumină în cazul observaţiilor îndelungate ce utilizează anumite aparate de măsurat.

Puterea de separare a ochiului

Se numeşte *putere de separare* unghiul cel mai mic format de razele vizuale care vin de la două puncte, astfel încât acestea să se vadă distinct.

Puterea de separare a ochiului depinde de obiectul privit, luminozitate, contrast faţă de fond şi forma ochiului.

Deoarece puterea de separare este influenţată de forma obiectului, se utilizează drept formă unitară *inelele Landolt* (figura 5.4).

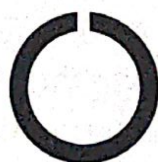


Figura 5.4. Inel Landolt

Un inel Landolt are o întrerupere de lăţime egală cu grosimea inelului. Aceste inele se desenează de obicei pe panouri, porţiunea de întrerupere ocupând diverse poziţii pe inel. De asemenea, pe panou se pun inele de diverse mărimi, recunoaşterea directă a porţiunii de întrerupere ajutând la aproximarea corectă a puterii de separare a ochiului.

Deoarece puterea de separare depinde de luminozitate, contrast şi forma obiectului, dar şi de ochiul respectiv, se adoptă ca putere de separare etalon cea care corespunde unui unghi de 1 *min* (de arc).

Senzaţia de relief

Senzaţia de relief percepută de om se datorează faptului că atunci când se priveşte un obiect, axele vizuale ale ochilor sunt îndreptate instinctiv spre obiect, astfel încât în fiecare ochi imaginea se formează pe pata galbenă corespunzătoare. Imaginile, datorită poziţiei diferite a ochilor faţă de obiect, sunt distincte, însă cele două impresii contopindu-se în creier, senzaţia este unică. La observarea unui obiect se realizează două acomodări distincte şi anume: a unghiului între cele două axe vizuale, respectiv a convergenţei cristalinelor.

Amândouă informează observatorul asupra poziţiei şi caracteristicilor spaţiale ale obiectului. Senzaţia de relief este datorată faptului că cele două imagini nu sunt identice.

5.2.1.2. Deficienţe de convergenţă a ochiului

Ochiul miop

Ochiul miop este mai alungit decât ochiul normal, astfel încât focarul său se află în faţa retinei; imaginile obiectelor îndepărtate (situate la infinit) nu se formează pe retină, ci în faţa ei (figura 5.5). Prin bombarea cristalinului situaţia nu se îmbunătăţeşte, deoarece aceste imagini nu se duc pe retină, ci se îndepărtează de ea.

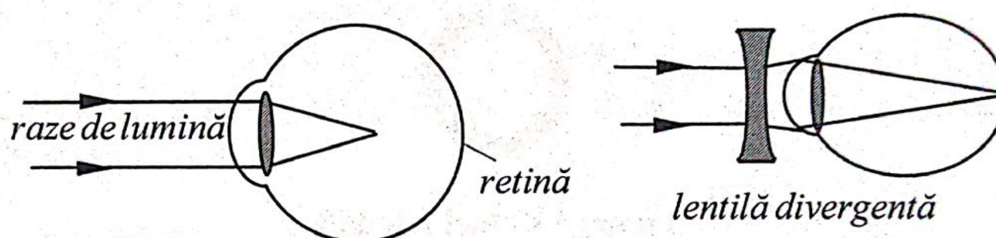


Figura 5.5. Formarea imaginii în ochiul miop şi corectarea deficienţei

Obiectul trebuie apropiat până la o anumită distanţă (în funcţie de gradul de miopie) pentru ca imaginea să se formeze pe retină cu ochiul neacomodat. Apropiind mai mult obiectul, ochiul poate păstra, prin acomodare, imaginea pe retină, până la o distanţă minimă de cca. $5\,cm$. Ochiul miop are aşadar atât punctum remotum, cât şi cel proximum mai apropiate decât ochiul normal. El nu poate vedea clar obiecte mai îndepărtate decât punctul său remotum. Defectul se corectează cu *lentile divergente*, al căror focar se află în punctul remotum al ochiului miop.

Ochiul hipermetrop

Ochiul hipermetrop este mai „turtit" decât ochiul normal, astfel încât focarul său se află în spatele retinei (figura 5.6).

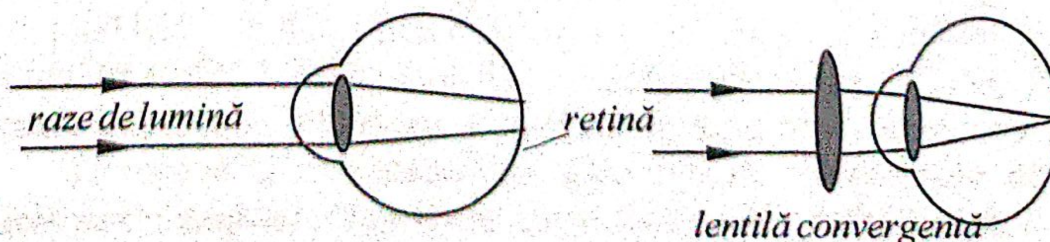


Figura 5.6. Formarea imaginii în ochiul hipermetrop şi corectarea deficienţei

În starea relaxată a ochiului hipermetrop, imaginile obiectelor de la infinit nu se formează pe retină, ci în spatele ei, deci nici acest ochi nu vede clar obiectele de la infinit. Spre deosebire de cele miop, însă, el poate, prin acomodare (bombarea cristalinului), să aducă imaginea pe retină. Distanţa minimă până la care poate vedea (acomodat) este însă mai mare decât la ochiul normal. Aşadar, hipermetropul poate vedea clar obiectele mai îndepărtate numai cu efort de acomodare, iar obiectele mai apropiate, care intră în limitele de acomodare ale unui ochi normal, nu le poate distinge clar.

Folosind ochelari cu *lentile convergente*, imaginea poate fi adusă pe retină atât pentru obiectele îndepărtate, privind neacomodat, cât şi pentru obiecte apropiate, privind acomodat.

Ochiul prezbit

Ochiul prezbit este ochiul oamenilor în vârstă şi se datorează slăbirii cu timpul a capacităţii de bombare a cristalinului; un astfel de ochi va avea punctul proximum mai îndepărtat decât la un ochi normal. Obiectele mai apropiate vor avea deci imaginile în spatele retinei şi pentru aducerea lor pe retină se folosesc *lentile convergente*, care măresc convergenţa ochiului, ca şi în cazul ochiului hipermetrop.

5.2.2. Aparatul fotografic

Aparatul fotografic este un instrument optic cu imagini reale, imaginea formându-se prin intermediul obiectivului în planul imagine, unde se află filmul fotografic (figura 5.7).

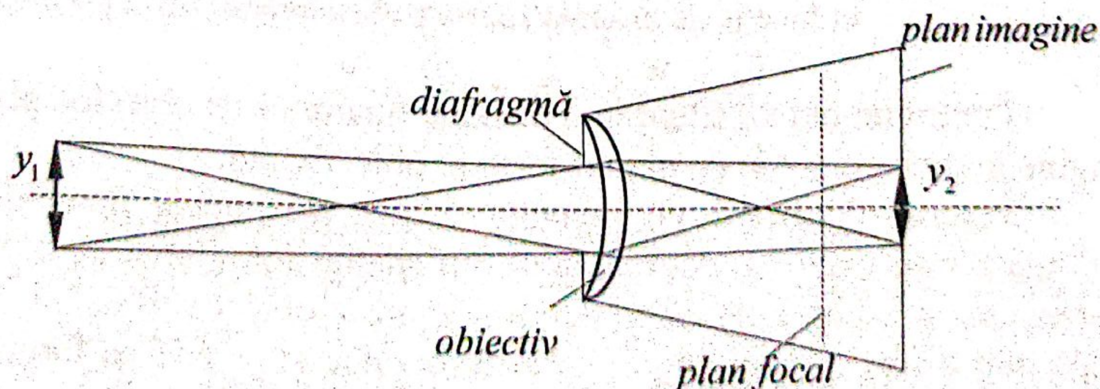


Figura 5.7. Schema de principiu a formării imaginii printr-un sistem optic convergent

5.2.2.1. Mărimi caracteristice. Profunzimea de câmp în spaţiul obiect

Obiectivul aparatului fotografic este caracterizat prin *distanţă focală* şi *deschidere relativă*.

Deschiderea relativă este definită prin raportul:

$$d = \frac{2h}{f}$$

unde h este raza diafragmei, iar f reprezintă distanţa focală.

Pe un format fix al imaginii, care depinde de aparatul fotografic, se vor obţine imagini din câmpul obiect mai mari sau mai mici, în funcţie de distanţa focală a obiectivului. Cu cât distanţa focală a obiectivului este mai mare, pe aceeaşi suprafaţă, se obţin imagini dintr-o regiune mai mică de spaţiu. Rezultă că imaginile vor fi, de fapt, mărite faţă de cele obţinute cu un obiectiv de distanţă focală mică, deoarece cu un obiectiv de distanţă focală mică, pe aceeaşi suprafaţă, se fotografiază o regiune mai întinsă, care conţine şi imaginile obţinute anterior, dar la o scară mult mai redusă (figura 5.8).

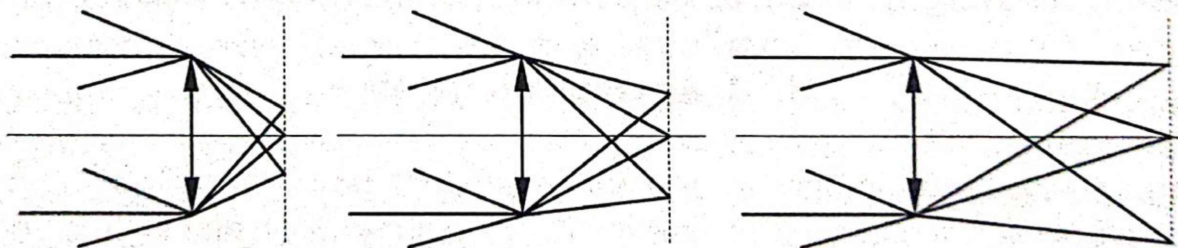


Figura 5.8. Formarea imaginii în aparatul de fotografiat în funcţie de distanţa focală a obiectivului

Pentru un obiect situat la o distanţă mai mică de obiectiv, planul imagine nu mai coincide cu planul focal al obiectivului.

Pentru obiectivul cu distanţa focală mai mică, deschiderea unghiulară este maximă, deci câmpul din spaţiul fotografiat pe aceeaşi dimensiune a fotografiei este maxim. Pentru obiectivul de distanţă focală mai mare, câmpul unghiular este mai mic şi pe acelaşi format al fotografiei se obţin imagini mai puţine, dar mai mari.

Obţinerea unei fotografii clare a unui spaţiu în profunzime se bazează pe acuitatea vizuală a observatorului, care este de 1 *minut* de arc. Rezultă că o pată se reduce la un punct atunci când este văzută sub

un unghi mai mic sau egal cu un minut de arc. Acest unghi depinde de distanţa de la care se priveşte, dar, dacă se consideră că distanţa este cea minimă de vedere clară, dimensiunea petei care se vede sub un minut de arc este de aproximativ 0,1 *mm*.

Fie situaţia din figura 5.9:

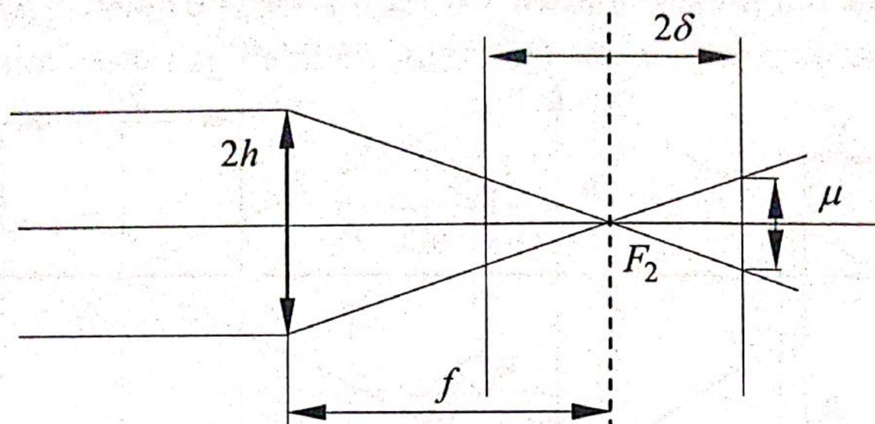


Figura 5.9. Distanţa de profunzime. Formarea imaginii clare a unui obiect situat la infinit

Obiectul fiind situat la infinit, planul focal coincide cu planul imagine.

Pe o distanţă δ în faţa şi în spatele planului imagine se vor vedea petele ca şi puncte. Distanţa δ poartă numele de *distanţă de profunzime* (dă profunzimea de câmp în spaţiul imagine); oriunde se plasează filmul fotografic în interiorul acestei regiuni, pe acesta se va observa o imagine clară.

Conform figurii 5.9 se formează două triunghiuri asemenea; scriind raportul de asemănare, rezultă:

$$\frac{\mu}{2h}=\frac{\delta}{f} \Rightarrow \delta = f\frac{\mu}{2h}=\frac{\mu}{\dfrac{2h}{f}}$$

Mărimea δ reprezintă profunzimea de focar; se observă că ea creşte odată cu scăderea deschiderii relative, adică cu scăderea razei diafragmei şi cu creşterea distanţei focale.

Fie situaţia în care obiectul se găseşte la o distanţă finită, x_1 (figura 5.10). Se disting două triunghiuri asemenea; raportul de asemănare este:

$$\frac{\delta}{f+x_2}=\frac{\mu}{2h}\Rightarrow\delta=\frac{\mu(f+x_2)}{2h}\left(=\frac{\mu}{\frac{2h}{f+x_2}}\right)$$

valoarea lui δ fiind mai mare decât pentru obiectul situat la infinit.

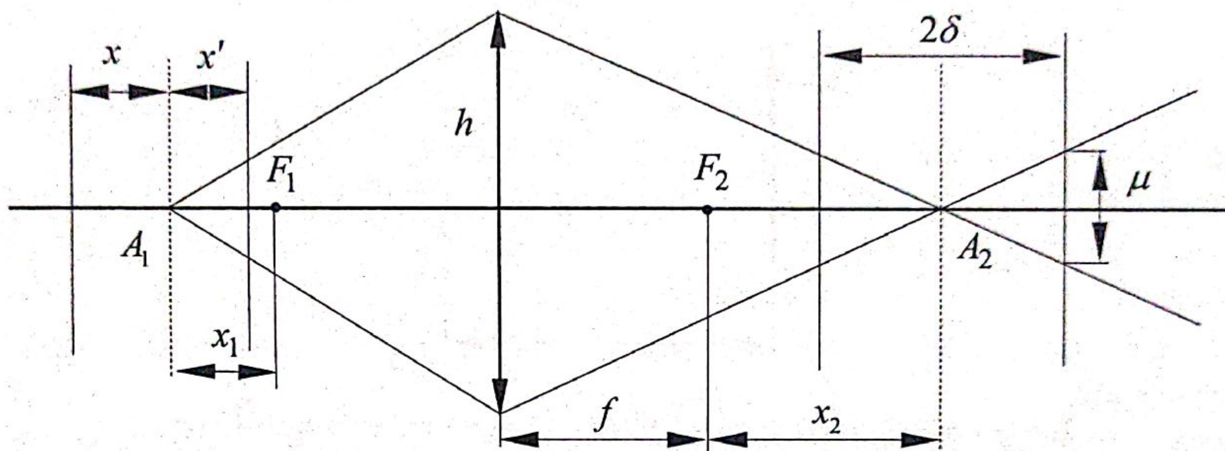


Figura 5.10. Distanţa de profunzime. Formarea imaginii clare a unui obiect situat la distanţă finită

Faptul că în spaţiul imagine există regiunea 2δ în care imaginea pare clară, face ca şi în spaţiul obiect să existe o regiune în care toate obiectele vor avea imagine clară pe placa fotografică.

În cele ce urmează, se doreşte calculul întinderii acestei regiuni în faţa şi în spatele planului obiect pentru care este pus la punct aparatul fotografic. Conform formulei lui Newton:

$$\begin{cases}(x+x_1)(x_2-\delta)=f^2\\(x_1-x')(x_2+\delta)=f^2\end{cases}$$

a) se foloseşte prima relaţie, $(x+x_1)(x_2-\delta)=f^2$

$$\underbrace{x_1x_2}_{=f^2}-x_1\delta+xx_2-x\delta=f^2$$

$$x(x_2-\delta)=x_1\delta\Rightarrow x=\frac{x_1\delta}{x_2-\delta}=\frac{x_1\mu(x_1+f)}{2hf-\mu(x_1+f)}$$

b) se foloseşte a doua relaţie, $(x_1-x')(x_2+\delta)=f^2$

$$\underbrace{x_1x_2}_{=f^2} + x_1\delta - x'x_2 - x'\delta - f^2$$

$$x'(x_2+\delta) = x_1\delta \Rightarrow x' = \frac{x_1\delta}{x_2+\delta} = \frac{x_1\mu(x_1+f)}{2hf+\mu(x_1+f)}$$

Dacă se ţine cont că în majoritatea cazurilor f (de ordinul centimetrilor) este neglijabil în sume faţă de x_1 (de ordinul metrilor), rezultă:

$$x = \frac{x_1^2\mu}{2hf - \mu x_1}$$

respectiv:

$$x' = \frac{x_1^2\mu}{2hf + \mu x_1}$$

de unde rezultă că dacă h şi f scad, profunzimea de câmp în spaţiul obiect creşte.

5.2.2.2. Formarea imaginii fotografice. Profunzimea câmpului imaginii

O mică porţiune P de pe suprafaţa unui obiect (asimilabilă cu un punct) reflectă difuz o parte din lumina venită de la Soare sau de la o sursă artificială (figura 5.11).

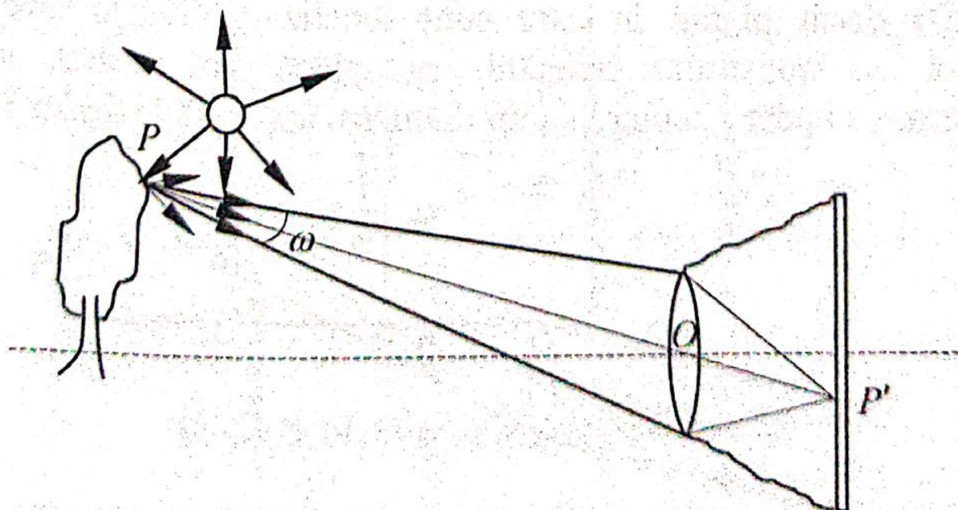


Figura 5.11. Formarea imaginii fotografice a unui obiect punctiform

O parte din lumină (cuprinsă în unghiul solid ω) cade pe suprafaţa lentilei. Neglijând unele mici pierderi datorate reflexiei şi absorbţiei de către lentilă, lumina care cade pe lentilă este focalizată pe pelicula fotografică, formând o mică pată aproape punctiformă P' acolo unde apare o concentrare de energie luminoasă. Toate celelalte puncte ale obiectului, aflate în câmpul aparatului, vor da imagini sub forma unor pete punctiforme, mai mult sau mai puţin luminoase, după cum porţiunile corespunzătoare de pe obiect primesc şi reflectă mai multă sau mai puţină lumină în direcţia aparatului.

Deoarece toate aceste imagini se găsesc pe dreptele care unesc punctele respective cu centrul optic O, rezultă că imaginea obţinută reprezintă o *proiecţie centrică a obiectului*. Se spune că imaginea este *ortoscopică* (figura 5.12).

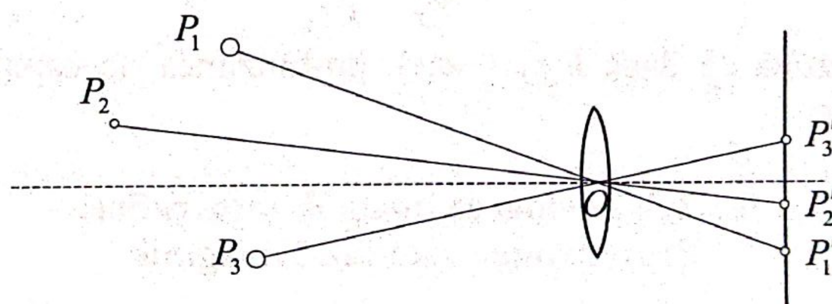


Figura 5.12. Formarea imaginii ortoscopice prin lentilă

Dacă placa fotografică este plasată mai aproape sau mai departe de lentilă decât planul în care sunt focalizate diferite imagini ale punctelor ce constituie obiectul, pe placă vor apărea nu pete punctiforme, ci pete circulare cu un diametru apreciabil (figura 5.13).

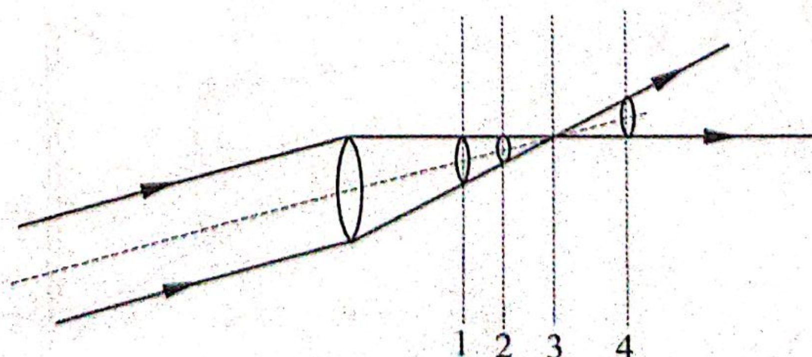


Figura 5.13. Formarea petelor difuze (1)

Cu cât este mai mic diametrul petelor în planul imaginii, cu atât va fi mai clară fotografia şi mai bogată în detalii, deci va avea o *rezoluţie* mai bună.

Imaginea este mai clară dacă placa fotografică se plasează în planul conjugat imagine. Deoarece poziţia acestuia se modifică o dată cu distanţa la planul conjugat obiect, este necesar ca distanţa obiectiv-placă fotografică să poată fi variată între anumite limite, pentru operaţia de *punere la punct* a distanţei.

Profunzimea câmpului imaginii

Imaginea unor puncte situate într-un plan obiect π se formează într-un plan imagine π', conjugat cu primul şi care este situat la o distanţă cu atât mai mare de planul principal al lentilei, cu cât planul obiect este mai apropiat de aparat (figura 5.14).

Punctele P_1, P_2, P_3 cuprinse în planele obiect π_1, π_2, π_3 vor da imaginile P_1', P_2', P_3' cuprinse în planele imagine conjugate π_1', π_2', π_3'. Materialul fotosensibil nu poate ocupa decât cel mult unul din aceste plane; astfel, numai punctele situate în planul conjugat obiect corespunzător planului imagine pe care îl ocupă pelicula vor da imagini de claritate maximă.

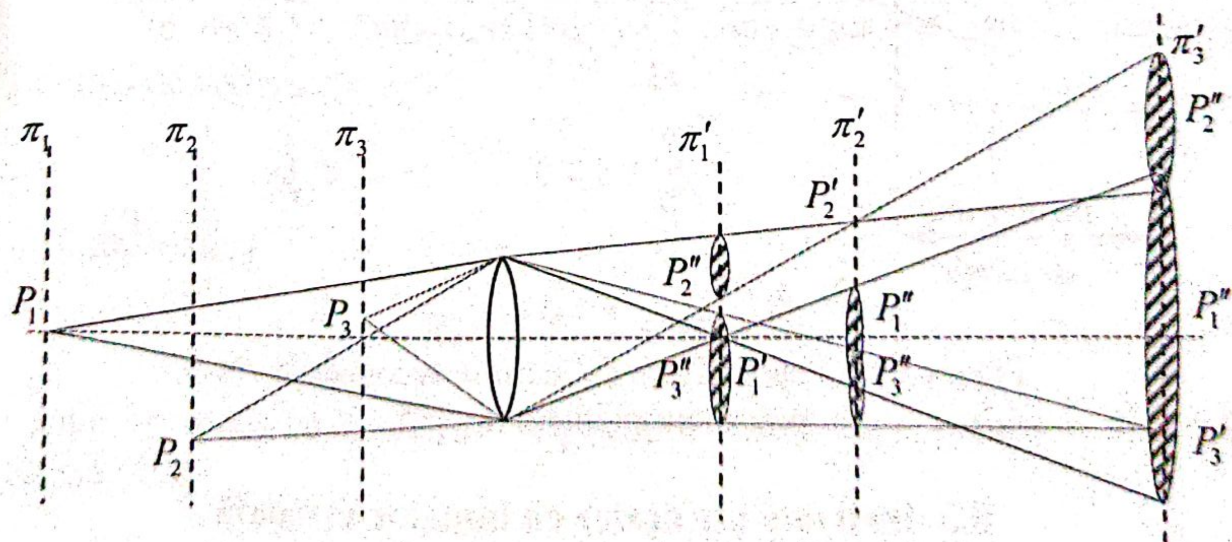


Figura 5.14. Formarea petelor difuze (2)

Pentru un subiect ale cărui detalii nu sunt într-un singur plan, ci ocupă mai multe plane diferite, nu se poate obţine o imagine clară a tuturor detaliilor, decât dacă acestea se află la distanţe foarte mari de

aparat (obiectele foarte îndepărtate, indiferent de distanţă, formează imaginea în planul focal imagine).

Deoarece ochiul omenesc are o rezoluţie limitată, se admite o anumită valoare limită pentru diametrul d al petelor difuze.

Dacă petele difuze ce rezultă pentru punctele din subiect nepuse riguros la punct sunt suficient de mici pentru ca chiar mărirea apreciabilă a unui negativ de format mic să nu depăşească în diametru puterea de separaţie a ochiului, imaginea formată în realitate din cerculeţe cu diametrul la limita admisibilă va apărea ca perfect clară.

Astfel, deplasând pelicula fotografică într-o poziţie intermediară, se poate ajunge în situaţia în care toate punctele sunt redate prin pete de difuziune de diametru acceptabil de mic.

Figura 5.15 ilustrează ceea ce se înţelege prin *profunzime de câmp*: intervalul dintre planele π_2 şi π_3 pentru care diametrele d_2 şi d_3 ale petelor difuze nu depăşesc limita admisă.

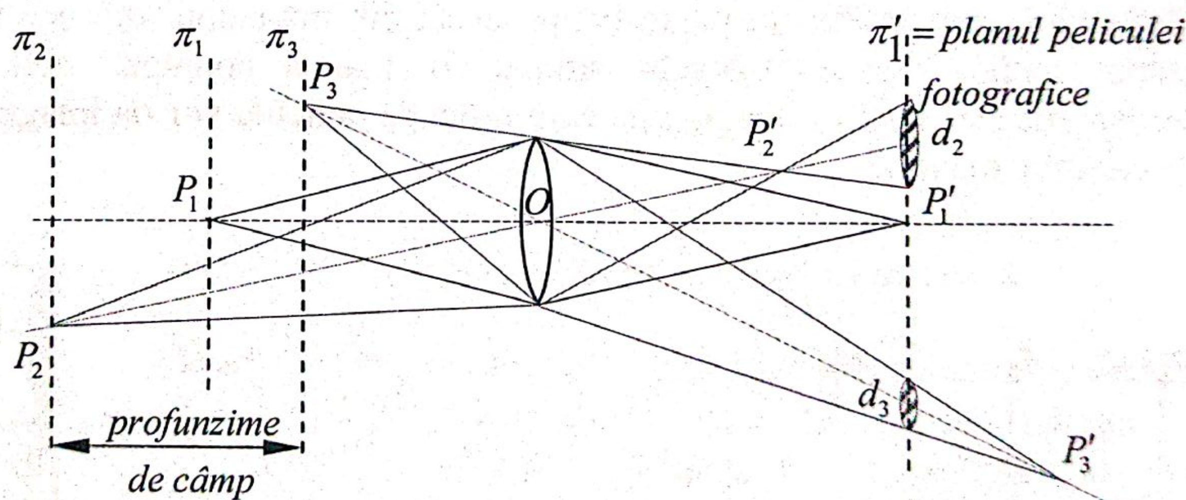


Figura 5.15. Petele difuze de mărime acceptabilă vor fi percepute ca imagine clară

5.3. Instrumente optice cu imagine virtuală

Imaginea formată de un astfel de instrument optic nu poate fi prinsă pe un ecran; ea este virtuală şi se formează în interiorul instrumentului, în punctul în care se întâlnesc prelungirile razelor emergente.

5.3.1. Lupa

Lupa este un sistem convergent cu ajutorul căruia se obţine o imagine mărită a unui obiect plasat în apropierea sistemului, între focar şi lentilă. Se obţine astfel o imagine virtuală, dreaptă şi mărită a obiectului (figura 5.16).

Observatorul deplasează lupa între obiect şi ochi, astfel încât imaginea să se formeze între punctul de distanţă optimă de vedere clară şi punctul unde nu mai este nevoie ca ochiul să producă acomodarea (adică punctul de la infinit). Această deplasare constituie *punerea la punct a lupei*.

Puterea lupei este:

$$P = \frac{diametrul\ aparent\ al\ imaginii}{înălţimea\ obiectului} = \frac{tg\alpha_2}{y_1} = \frac{\frac{y_1}{f}}{y_1} = \frac{1}{f}$$

deci puterea lupei este numeric egală cu convergenţa lentilei.

Conform definiţiei, *grosismentul* lupei (mărirea unghiulară) se calculează ca:

$$G = \frac{diametrul\ aparent\ al\ imaginii\ (obiectului\ privit\ prin\ lupă)}{diametrul\ aparent\ al\ obiectului\ privit\ liber} = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}$$

În mod normal, obiectul y_1, privit liber, se află la distanţa minimă de vedere clară, δ:

$$tg\alpha_1 = \frac{y_1}{\delta}$$

de unde rezultă

$$G = \delta \frac{tg\alpha_2}{y_1} = \delta P = \frac{\delta}{f}$$

relaţie ce arată că o mărire unghiulară mare apare pentru o distanţă focală mică

Figura 5.16. Formarea imaginii într-o lupă

Observaţie

1. Dacă ochiul este relaxat, el vede obiectul la distanţa optimă de vedere clară, δ, sub unghiul α_1 (figura 5.17.*a*). Obiectul se aduce cât mai aproape de focarul lentilei, situându-se între lentilă şi focar; se obţine astfel o imagine virtuală şi mărită a acestuia, y_2, care se priveşte neacomodat sub unghiul α_2 (figura 5.17.*b*, linia continuă). Astfel:

$$G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\frac{y_1}{f}}{\frac{y_1}{\delta}} = \frac{\delta}{f}$$

relaţie cunoscută deja.

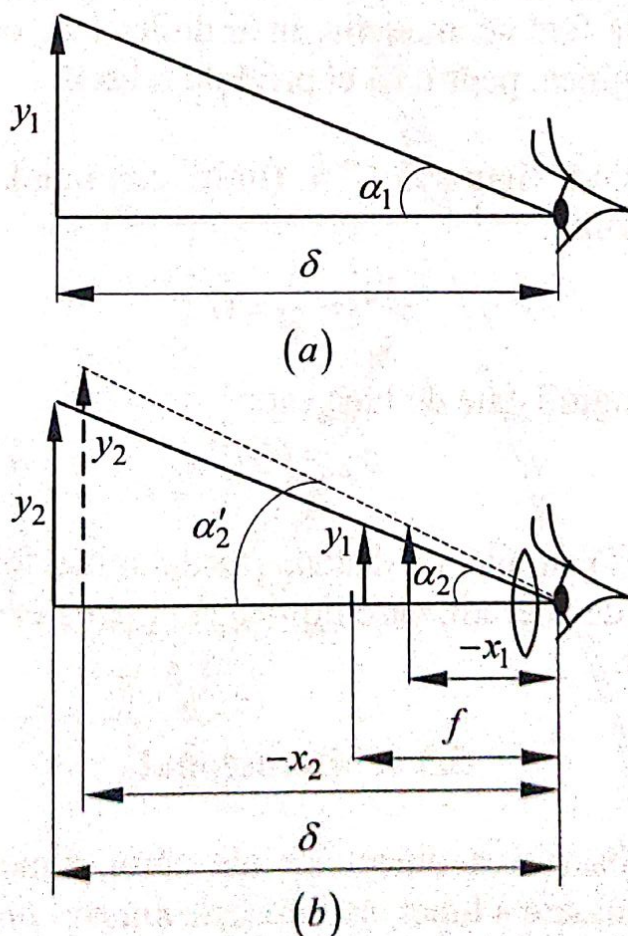


Figura 5.17. Reprezentare simplificată a observării imaginii într-o lupă: (*a*) ochi relaxat;(*b*) ochi acomodat – linia întreruptă

Dacă, însă, se foloseşte acomodaţia când se priveşte prin lupă, situaţia este cea din figura 5.17.*b* (linia întreruptă). Grosismentul devine:

$$G' = \frac{tg\alpha_2'}{tg\alpha_1} = \frac{\frac{y_1}{-x_1}}{\frac{y_1}{\delta}} = \frac{\delta}{-x_1}$$

Distanţa x_1 se determină din ecuaţia punctelor conjugate:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - f}{x_2 f}$$

iar grosismentul devine:

$$G' = \delta \frac{x_2 - f}{x_2 f} = 25 \frac{-25 - f}{-25 \cdot f} = \frac{25}{f} + 1$$

Cu toate că această valoare a grosismentului este mai mare decât cea obţinută fără acomodaţie, în al doilea caz, ochiului îi este mai uşor să vadă imaginea, pentru că el priveşte relaxat.

2. Folosind figura 5.17.*b* (linia continuă), din asemănarea triunghiurilor, rezultă:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\delta}{f} = G$$

deci mărimea imaginii date de lupă este:

$$y_2 = G y_1$$

3. O lentilă simplă, cu distanţa focală mică, folosită ca lupă, este puternic afectată de aberaţii, care limitează puterea ei optică şi reduc din calitatea imaginii.

5.3.2. Microscopul

Pentru observarea obiectelor ale căror dimensiuni liniare cad sub puterea separatoare a lupei, se foloseşte *microscopul* (figura 5.18).

Acesta este alcătuit din două sisteme optice convergente montate în corpuri metalice separate (obiectivul, adus în vecinătatea obiectului, respectiv ocularul, adus în vecinătatea ochiului) şi dă o imagine mărită a unui obiect plasat la o distanţă finită faţă de obiectiv, în condiţiile în care obiectele sunt prea mici pentru a fi observate cu ochiul liber.

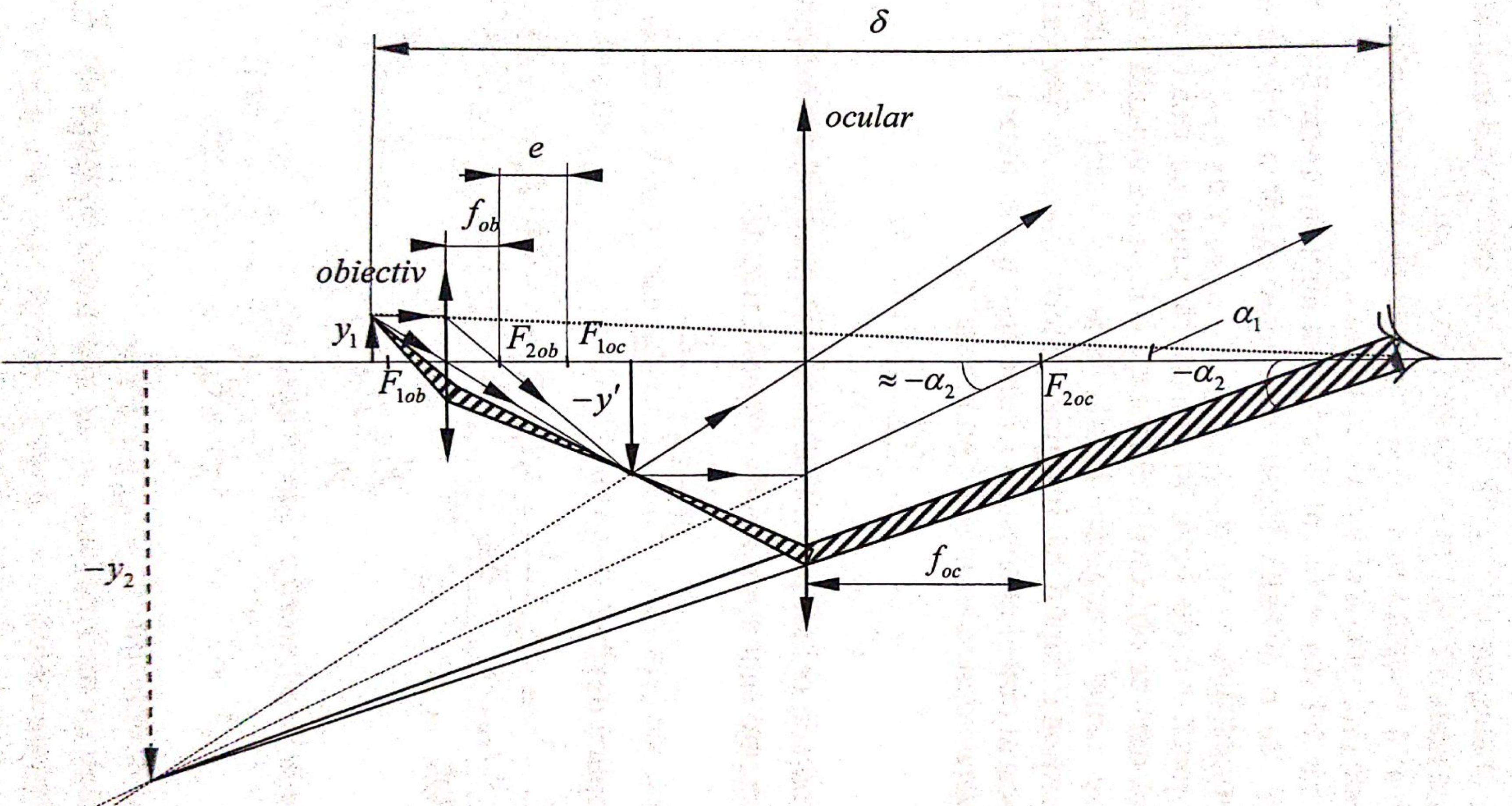


Figura 5.18. Formarea imaginii într-un microscop

Obiectivul este format dintr-un ansamblu de lentile plasate aproape de obiect, are o distanţă focală mică, de ordinul milimetrilor şi dă o imagine reală, răsturnată şi mărită a obiectului.

Această imagine mai poartă numele de *imagine intermediară*, pentru că este preluată ca obiect de către ocular.

La rândul său, ocularul este format dintr-un ansamblu de lentile convergente, cu o distanţă focală mai mare decât a obiectivului, de ordinul centimetrilor.

El joacă rol de lupă, în sensul că preia ca obiect imaginea intermediară dată de obiectiv şi formează o imagine virtuală a acesteia, obţinându-se astfel imaginea finală, prin microscop, a obiectului. Trebuie menţionat faptul că imaginea intermediară se formează între ocular şi focarul obiect al acestuia (foarte aproape de focar).

Puterea optică a microscopului este[12]:

$$P = \frac{tg(-\alpha_2)}{y_1}$$

Deoarece ochiul preferă să privească neacomodat imaginea y_2, razele emergente sunt aproximativ paralele; rezultă:

$$tg(-\alpha_2) \approx \frac{-y'}{f_{oc}}$$

şi puterea optică devine:

$$P = -\frac{y'}{y_1} \cdot \frac{1}{f_{oc}} = -\beta_{ob} \cdot \frac{1}{f_{oc}} = -\beta_{ob} \cdot P_{oc} = -\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}} \cdot P_{oc} = -\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}} \cdot \frac{1}{f_{oc}}$$

unde raportul:

$$\frac{y'}{y_1} = \beta_{ob}$$

reprezintă *mărirea liniară a obiectivului*, iar

$$\frac{1}{f_{oc}} = P_{oc}$$

este *puterea ocularului*.

Imaginea intermediară y' se află foarte aproape de F_{1oc} şi se poate scrie (figura 5.19):

[12] Se foloseşte convenţia geometrică de semne

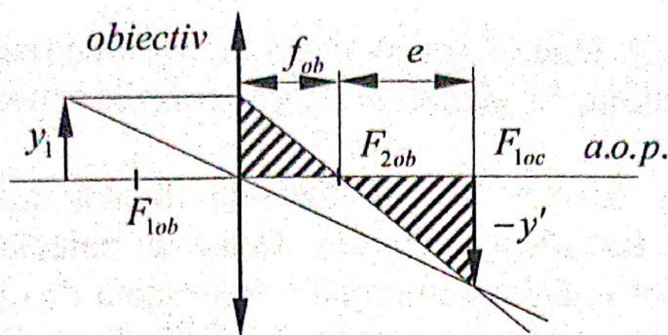


Figura 5.19. Formarea imaginii în obiectivul microscopului.

$$\frac{e}{f_{ob}}=\frac{-y'}{y_1} \Rightarrow y'=-y_1\frac{e}{f_{ob}}$$

respectiv:

$$P=-\frac{y'}{y_1 f_{oc}}=\frac{\frac{ey_1}{f_{ob}}}{y_1 f_{oc}}=\frac{e}{f_{ob}\cdot f_{oc}}$$

Grosismentul microscopului este:

$$G=\frac{tg(-\alpha_2)}{tg\alpha_1}$$

α_1 fiind unghiul sub care se vede obiectul, direct, aşezat la distanţa minimă de citire, $\delta=0,25\,m$. Conform figurii 5.18:

$$\left.\begin{aligned} tg(-\alpha_2)&\simeq\frac{-y'}{f_{oc}}\\ tg\alpha_1&=\frac{y_1}{\delta}\end{aligned}\right\} \Rightarrow G=\frac{-y'}{y_1}\cdot\frac{\delta}{f_{oc}}=-\beta_{ob}\cdot\frac{\delta}{f_{oc}}=-\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}}\cdot\frac{\delta}{f_{oc}}=-\delta\beta_{ob}P_{oc}$$

respectiv:

$$G=\frac{-y'}{y_1}\cdot\frac{\delta}{f_{oc}}=-\left(-y_1\frac{e}{f_{ob}}\right)\cdot\frac{1}{y_1}\cdot\frac{\delta}{f_{oc}}=\frac{\delta e}{f_{ob}\cdot f_{oc}}=\delta P$$

5.3.3. Luneta

Luneta este un instrument optic cu imagine virtuală, folosit la observarea obiectelor foarte îndepărtate, astfel încât se poate considera că de la orice punct al acestora ajung la noi fascicule practic paralele.

Obiectivul lunetei are o distanţă focală mare şi formează o imagine a obiectului, în planul său focal (razele venind, practic, de la infinit).

Ocularul lunetei are o distanţă focală mică, de ordinul centimetrilor şi formează imaginea finală a obiectului prin lunetă, preluând ca obiect imaginea intermediară formată de obiectiv. Ea joacă rolul unei lupe, imaginea intermediară formându-se foarte aproape de focarul obiect al ocularului (dar între ocular şi focar) şi dând o imagine finală virtuală, dreaptă faţă de imaginea intermediară.

Fie un obiect astronomic AB. Luneta se îndreaptă cu axa optică principală spre extremitatea A a acestuia; toate razele provenite de la A sunt paralele cu axa optică şi converg în focarul principal imagine F_{2ob} al obiectivului (figura 5.20).

Asupra obiectivului cade şi un fascicul de raze paralele între ele, care provin de la extremitatea B a obiectului, dar înclinate sub un unghi α_1 faţă de primul fascicul; aceste raze converg în focarul secundar B' al obiectivului. Astfel, în planul focal al obiectivului se obţine imaginea intermediară reală şi răsturnată, y'.

Ochiul preferă însă să privească neacomodat imaginea, astfel încât observatorul deplasează ocularul pentru ca imaginea finală să se formeze la infinit, deci focarul obiect al ocularului, F_{1oc}, să coincidă cu planul imaginii intermediare y'. Se obţine astfel un *sistem afocal*, iar razele pe direcţia lui B_2 pot fi considerate paralele. Cu notaţiile din figura 5.20, rezultă:

$$\left.\begin{aligned} tg(-\alpha_2) &= \frac{-y'}{f_{oc}} \\ tg\alpha_1 &= \frac{-y'}{f_{ob}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

Deoarece ocularul funcţionează ca o lupă,

$$\frac{1}{f_{oc}} = P_{oc} \Rightarrow G = f_{ob}P_{oc}$$

Observaţie

Această lunetă dă imagini răsturnate ale obiectelor astronomice; ea se mai numeşte şi *lunetă astronomică*.

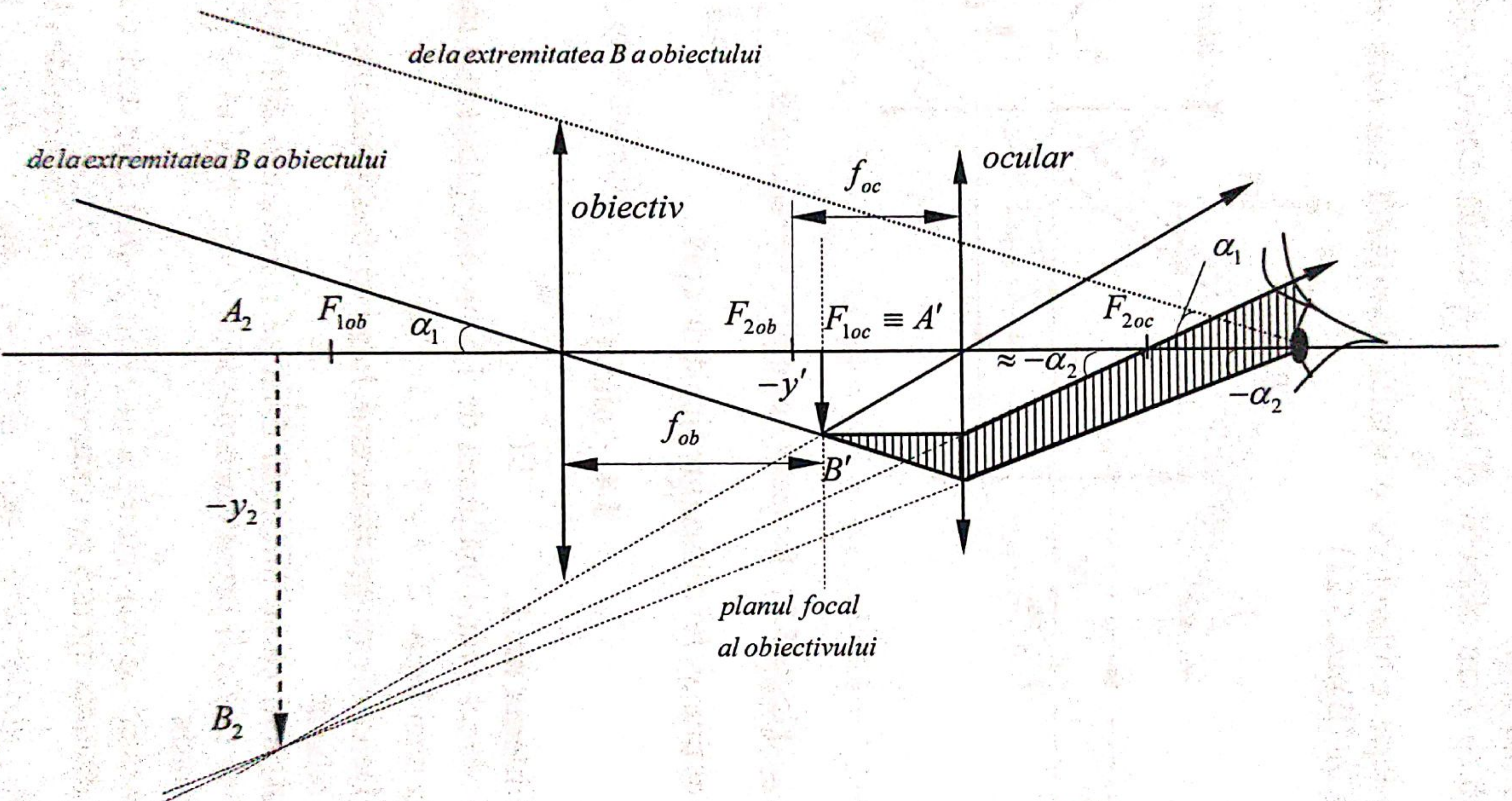


Figura 5.20. Formarea imaginii în luneta astronomică

Pentru studiul obiectelor terestre, lunetele au un dispozitiv de răsturnare a imaginii:
- se introduce între obiectiv şi ocular o lentilă convergentă (lentilă vehicul)
- se înlocuieşte ocularul cu o lentilă divergentă aşa cum este cazul *lunetei Galilei* (figura 5.21)

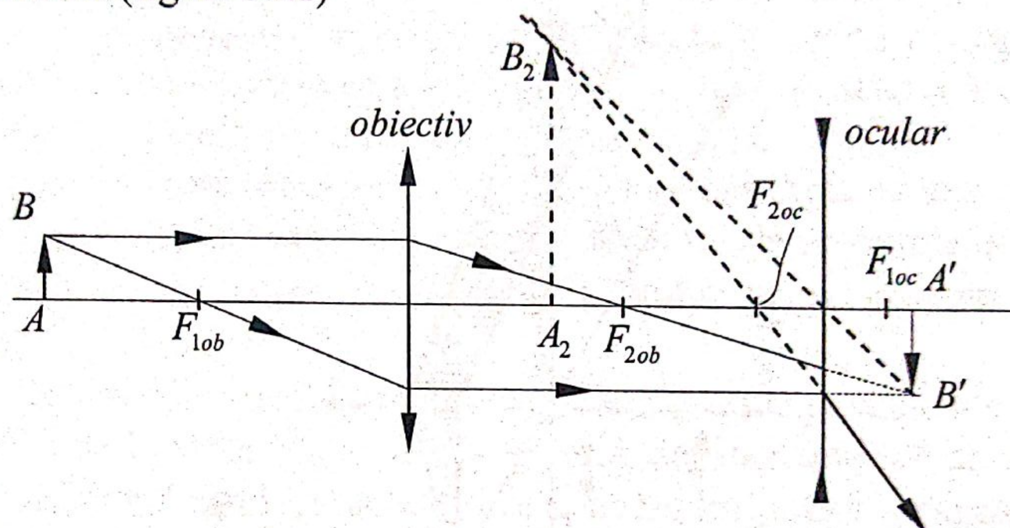


Figura 5.21. formarea imaginii în luneta Galilei

Se obţine astfel o imagine finală dreaptă.

5.4. Aplicaţii

Problema nr. 1.

Un obiect având înălţimea de $1,5cm$ este plasat la o distanţă de $5cm$ în faţa unei lupe.

a) Determinaţi grosismentul lupei şi înălţimea imaginii, când ochiul este relaxat

b) Arătaţi ce se întâmplă dacă se foloseşte o altă lupă, pentru care imaginea poate fi privită neacomodat, dacă obiectul se plasează la $10cm$ de aceasta

c) Arătaţi ce s-ar întâmpla în cazul primei lupe dacă ochiul ar fi focalizat la distanţa optimă de vedere clară, $\delta = 25cm$

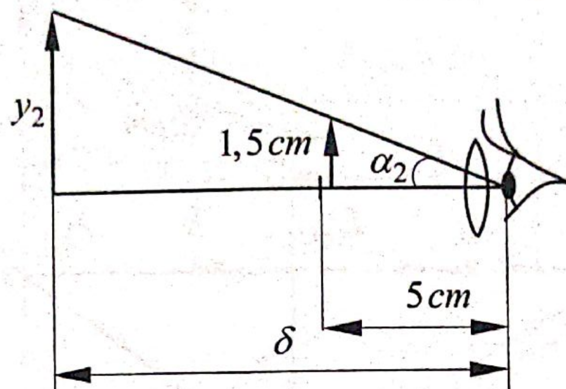
Rezolvare

- obiectul se plasează între lentilă şi focarul acesteia, în apropierea focarului, deci distanţa focală a lupei este:

$$f = 5\,cm$$

- imaginea este privită cu ochi relaxat, deci:

$$G = \frac{\delta}{f} = \frac{25}{5} = 5$$



- din geometria situaţiei:

$$(tg\alpha =)\frac{y_1}{f} = \frac{y_2}{\delta} \Rightarrow y_2 = y_1\frac{\delta}{f} = y_1 G = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5\,cm$$

- în cazul în care se foloseşte cea de a doua lupă, aceasta va avea distanţa focală:

$$f' = 10\,cm$$

respectiv grosismentul:

$$G' = \frac{\delta}{f'} = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

- imaginea va avea mărimea:

$$y_2' = y_1 G' = 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 3{,}75\,cm$$

- în cazul ochiului acomodat, grosismentul devine:

$$G'' = \frac{\delta}{f} + 1 = \frac{25}{5} + 1 = 6$$

iar înălţimea imaginii se modifică:

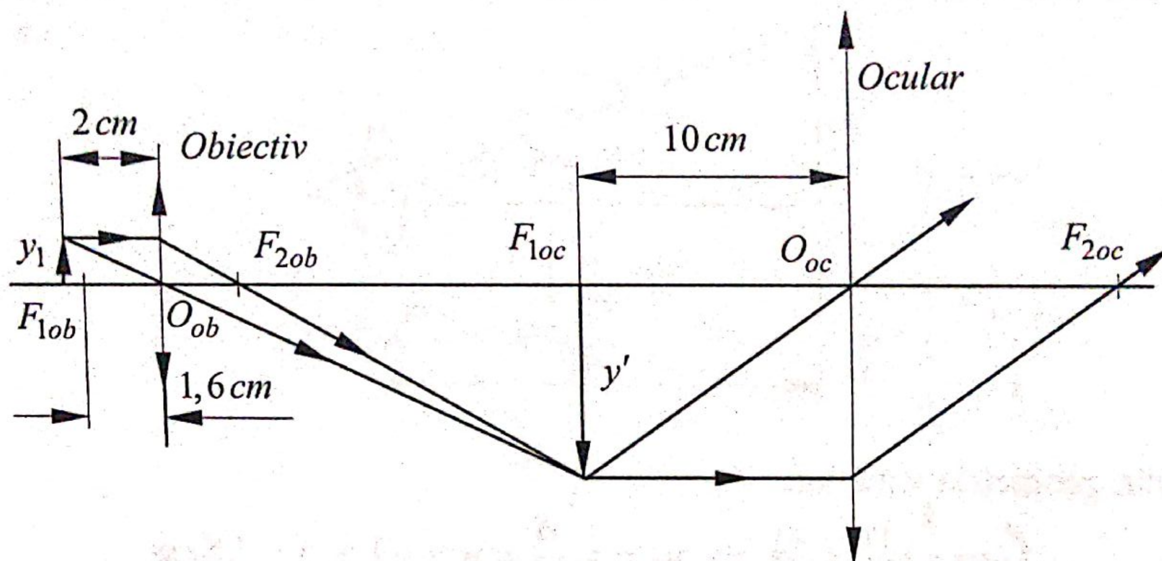
$$y_2'' = y_1 G'' = 1{,}5 \cdot 6 = 9\,cm$$

Problema nr. 2.

Folosind figura de mai jos, determinaţi grosismentul microscopului. Se presupune că ochiul este la distanţa optimă de vedere clară ($\delta = 25\,cm$).

Rezolvare

- dacă imaginea finală, formată de ocular, este la infinit, ochiul este relaxat; dacă imaginea nu se formează la infinit, ochiul nu este relaxat şi se foloseşte acomodaţia



- rezultă că, pentru ca imaginea să se formeze la infinit, trebuie ca imaginea intermediară să se formeze în focarul obiect al ocularului
- grosismentul se calculează cu relaţia:

$$G=\frac{\delta e}{f_{ob}\cdot f_{oc}}$$

unde e este distanţa dintre cele două focare (focarul imagine al obiectivului şi focarul obiect al ocularului)
- trebuie determinată distanţa dintre cele două focare
- cunoscând poziţia obiectului faţă de obiectiv, se determină poziţia imagini intermediare faţă de acesta:

$$\frac{1}{f_{ob}}=\frac{1}{x_{2ob}}-\frac{1}{x_{1ob}} \Rightarrow x_{2ob}=\frac{x_{1ob}\cdot f_{ob}}{x_{1ob}+f_{ob}}=\frac{(-2)\cdot 1,6}{-2+1,6}=8\,cm$$

- astfel, focarul obiect al ocularului trebuie să fie la $8\,cm$ faţă de obiectiv; distanţa dintre cele două focare este:

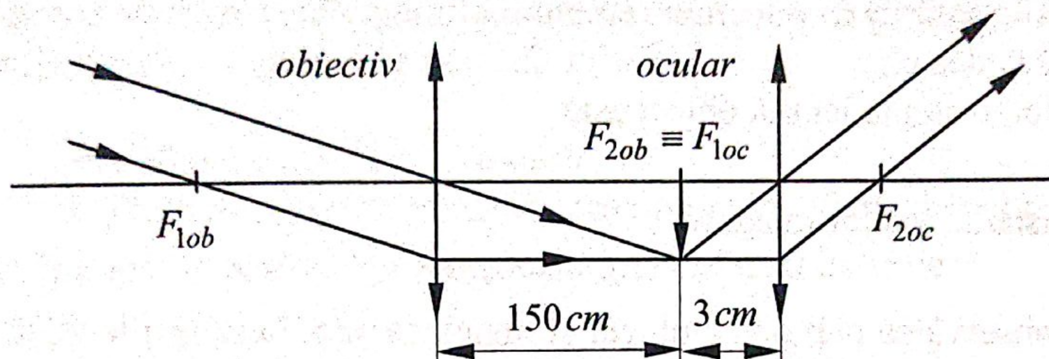
$$e=8-1,6=6,4\,cm$$

iar grosismentul va fi:

$$G=\frac{25\cdot 6,4}{1,6\cdot 10}=10$$

Problema nr. 3.

Pornind de la figura de mai jos, determinaţi grosismentul instrumentului optic atunci când ochiul este relaxat.



Rezolvare

- figura prezintă o lunetă astronomică, având distanţele focale:

$$f_{ob} = 150\,cm$$

$$f_{oc} = 3\,cm$$

- rezultă că grosismentul are valoarea:

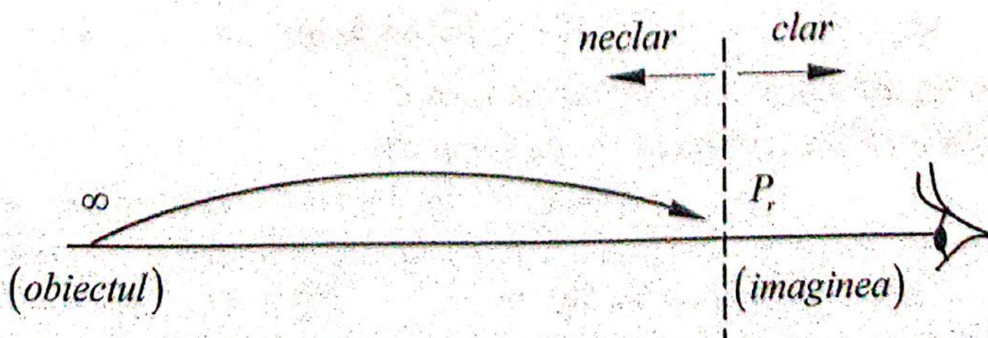
$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{150}{3} = 50$$

Problema nr. 4.

Un miop are punctum remotum la $50\,cm$ de ochi. Să se prescrie o lentilă potrivită pentru a-i corecta defectul de vedere.

Rezolvare

- punctum remotum reprezintă cel mai îndepărtat punct pe care îl poate vedea o persoană
- miopul vede neclar orice obiect situat dincolo de punctum remotum



- se consideră că pentru un ochi normal (emetrop) punctum remotum este situat la infinit, adică la distanțe mai mari de $25\,cm$
- scopul lentilei corectoare este de a aduce un obiect îndepărtat (adică situat la infinit) în punctum remotum al miopului, pentru ca acesta să îl poată vedea clar
- astfel, distanța lentilă obiect este

$$x_1 = -\infty$$

iar distanța lentilă-imagine:

$$x_2 = -50\,cm$$

- se observă că atât obiectul, cât şi imaginea sunt în stânga lentilei, deci vor avea semnul minus
- distanța focală a lentilei este:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow f = x_2 = -50\,cm$$

- semnul minus arată că lentila este divergentă
- deoarece prescripțiile oftalmologice indică convergența lentilelor corectoare:

$$C = \frac{1}{f} = -\frac{1}{50 \cdot 10^{-2}} = -2\,dioptrii$$

- prin urmare, pacientului i se va recomanda o lentilă corectoare divergență de două *dioptrii*

Observație

- nu s-a luat în considerare distanța ochi-lentilă; aceasta este nulă în cazul unor lentile de contact
- în general, distanța ochi-lentilă (distanța vertex[13]) este de $1,5 - 2\,cm$
- pentru un vertex egal cu $1,5\,cm$, distanța lentilă-punct remotum devine:

$$|x_2'| = 50 - 1,5 = 48,5\,cm$$

distanța lentilă-obiect rămânând tot infinit
- distanța focală a lentilei se modifică şi ea:

$$f' = x_2' = -48,5\,cm$$

---

[13] Distanța dintre suprafața posterioară a lentilei şi cornee se numeşte distanță vertex a lentilei

iar convergenţa ei devine:

$$C' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{48{,}5 \cdot 10^{-2}} = -2{,}06\,dioptrii$$

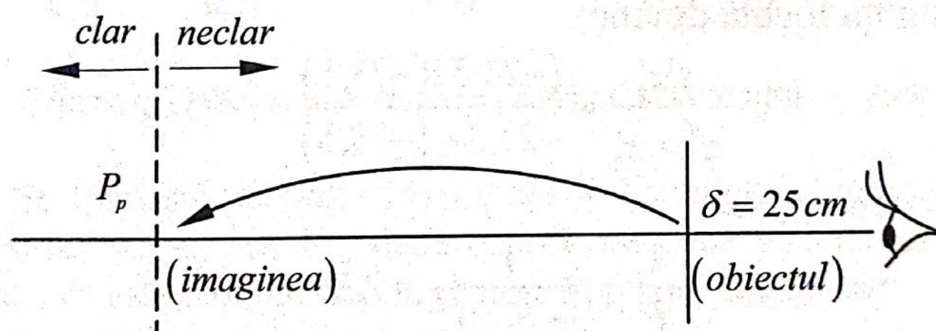
- deoarece nu se confecţionează lentile cu o astfel de convergenţă, se va prescrie o lentilă negativă de două *dioptrii*[14]

Problema nr. 5.

Un hipermetrop are punctum proximum la $75\,cm$ de ochi. Să se prescrie o lentilă potrivită pentru a-i corecta defectul de vedere.

Rezolvare

- un hipermetrop vede clar obiectele îndepărtate, dar are probleme la vederea celor apropiate, deci nu va vedea clar un obiect situat la distanţa optimă de vedere clară a unui emetrop



- scopul lentilei corectoare este de a duce imaginea obiectului (apropiat de ochi) în punctum proximum, pentru că hipermetropul doar aici îl vede bine
- prin urmare, având un obiect situat la $25\,cm$ în faţa ochiului, lentila va trebui să îi formeze imaginea la $75\,cm$ de ochi
- distanţa sa focală este:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow f = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(-25)(-75)}{-25-(-75)} = 37{,}5\,cm$$

[14] Lentilele de ochelari se produc în serie de masă pentru gama de dioptrii $(0 \ldots \pm 20)\,dioptrii$, cu pasul $\pm 0{,}25\,dioptrii$ în intervalul $(0 \ldots \pm 3)\,dioptrii$, $\pm 0{,}5\,dioptrii$ în intervalul $(\pm 3 \ldots \pm 6)\,dioptrii$ şi $\pm 1\,dioptrie$ pe restul domeniului

unde s-a ţinut cont de faptul că atât obiectul, cât şi imaginea se află la stânga lentilei
- convergenţa acesteia este:

$$C = \frac{1}{f} = \frac{1}{37{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}66\,dioptrii$$

ceea ce înseamnă că hipermetropul va primi o lentilă (convergentă) de $2{,}5\,dioptrii$

Observaţie

- dacă se ia în considerare distanţa vertex (de regulă $1{,}5\,cm$), se vor utiliza distanţele:

$$|x_1'| = 25 - 1{,}5 = 23{,}5\,cm$$
$$|x_2'| = 75 - 1{,}5 = 73{,}5\,cm$$

deci distanţa focală devine:

$$f' = \frac{x_1' x_2'}{x_1' - x_2'} = \frac{(-23{,}5)(-73{,}5)}{-23{,}5 - (-73{,}5)} = 34{,}5\,cm$$

respectiv convergenţa:

$$C' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{34{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}89\,dioptrii$$

- deoarece în practică se lucrează cu cea mai mică convergenţă pentru care pacientul distinge obiectele, acestuia i se vor prescrie lentile pozitive cu o convergenţă de $2{,}5\,dioptrii$, nu de $3\,dioptrii$

CAPITOLUL 6. SISTEME CENTRATE

Se numeşte *sistem centrat* (figura 6.1) un ansamblu de dioptri sferici care au centrele de curbură pe aceeaşi dreaptă, numită *axa sistemului*.

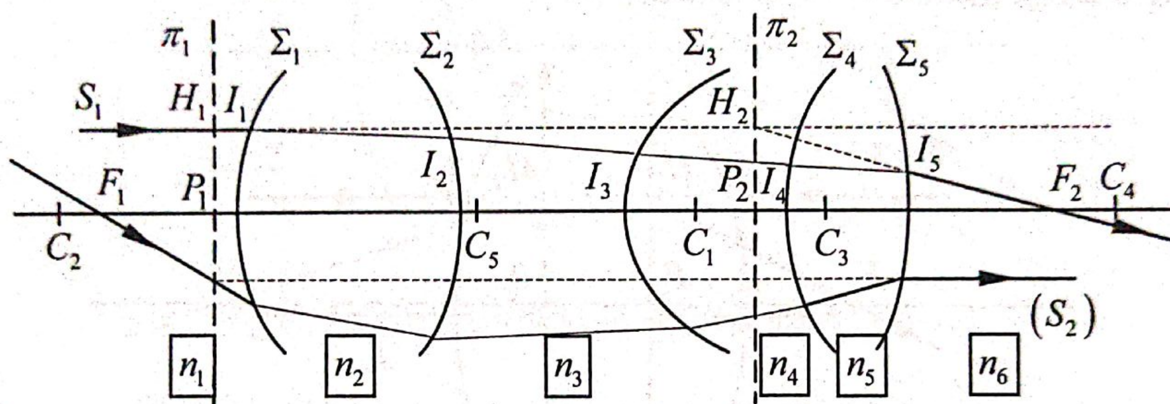


Figura 6.1. Refracţii succesive printr-un sistem optic centrat

Se numeşte *secţiune principală* a sistemului centrat, un plan care conţine axa sistemului; dacă o rază are două puncte conţinute în acest plan, ea este conţinută în întregime în planul considerat.

Se respectă următoarele reguli:

- axa optică este perpendiculară simultan pe toţi dioptrii
- o rază de lumină se propagă de-a lungul axei optice fără să devieze

6.1. Punctele cardinale ale unui sistem centrat

Se notează cu F_1 focarul obiect al sistemului de dioptri $\Sigma_1, \Sigma_2,...$ şi cu F_2 focarul imagine al acestuia.

Se reţin doar primul şi ultimul dioptru dintre toţi dioptrii care alcătuiesc sistemul (figura 6.2).

Fie raza S_1I_1, paralelă cu axa optică a sistemului. Ea părăseşte sistemul trecând prin focarul F_2. Prelungind direcţia razei incidente şi a celei emergente, ele se întâlnesc în H_2; acesta defineşte planul π_2,

perpendicular pe axa optică. Planul π_2 poartă numele de *plan principal imagine*.

În mod asemănător se obţine punctul H_1, care defineşte planul π_1, numit *plan principal obiect*.

Planele principale au proprietatea că sunt conjugate şi corespund unei măriri liniare (laterale) egală cu +1 (obiectul şi imaginea au aceeaşi mărime şi acelaşi sens).

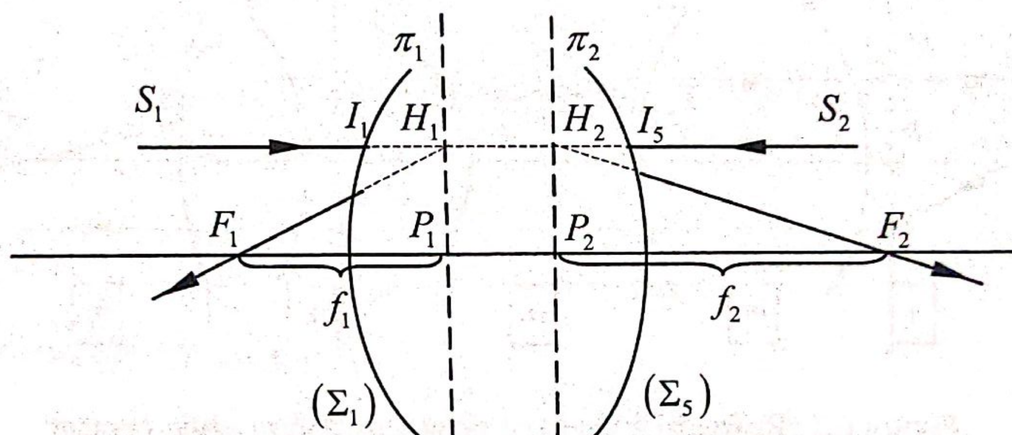


Figura 6.2. Planele principale ale unui sistem centrat

La intersecţia planelor principale cu axa optică se află *punctele principale* ale sistemului: punctul principal obiect P_1, respectiv punctul principal imagine P_2. Distanţa P_1P_2 se numeşte *interstiţiul sistemului*.

Se defineşte *distanţa focală* a sistemului ca fiind distanţa de la planul principal la focarul corespunzător. Dacă mediul din care vine raza incidentă este acelaşi cu cel în care raza emerge, cele două distanţe focale sunt egale.

Dacă raza care trece printr-un sistem optic iese paralel cu direcţia incidentă, cele două direcţii intersectează axa optică în *punctele nodale* N_1 şi N_2 (figura 6.3).

Fie punctul A_1, situat în planul focal obiect al sistemului; razele incidente care pornesc de aici vor emerge într-un fascicul paralel. În fascicolul incident poate fi o singură rază paralelă cu direcţia fascicolului emergent şi anume A_1N_1; aceasta intersectează axa optică

principală în N_1, iar raza emergentă care îi corespunde, intersectează axa optică principală în N_2.

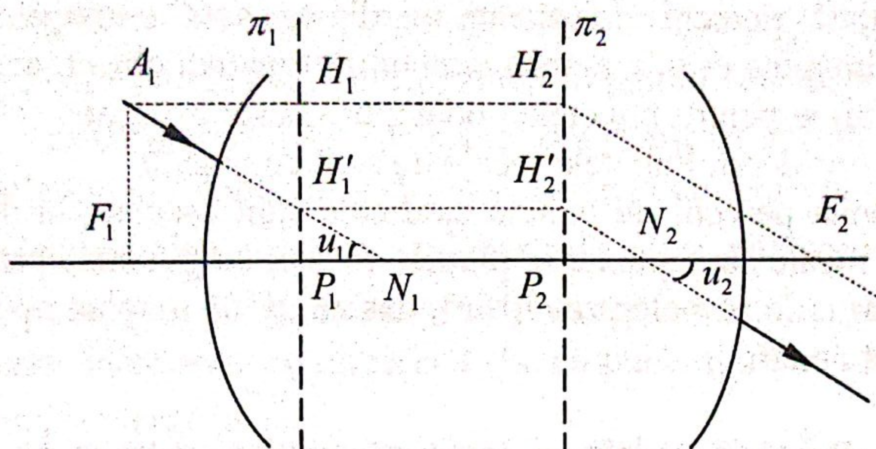


Figura 6.3. Punctele nodale ale unui sistem centrat

Conform figurii de mai sus, se poate scrie:

$$\Delta A_1F_1N_1 \equiv \Delta H_2P_2F_2 \;\Rightarrow\; F_1N_1 \equiv P_2F_2 = f_2, \textit{ distanţa focală imagine}$$

$$\Delta P_1N_1H_1' \equiv \Delta P_2N_2H_2' \;\Rightarrow\; P_1N_1 \equiv P_2N_2 \;\Rightarrow\; F_1P_1 = F_2N_2 = f_1, \textit{ distanţa focală obiect}$$

Poziţia punctelor nodale poate fi unic determinată pe baza poziţiei focarelor şi a valorii distanţelor focale. Mai mult:

$$P_1P_2 = P_1N_1 + N_1P_2 = P_2N_2 + N_1P_2 = N_1N_2$$

$$N_1N_2 \equiv P_1P_2 = \textit{interstiţiul sistemului}$$

Dacă mediile exterioare au acelaşi indice de refracţie, cele două puncte nodale se confundă cu punctele principale:

$$N_1 \equiv P_1;\; N_2 \equiv P_2$$

Focarele, punctele principale şi punctele nodale ale sistemului optic poartă denumirea generică de *puncte cardinale*. Ele servesc la determinarea mersului razei de lumină prin sistemul optic.

Observaţii

1. Deoarece avem egalitatea

$$u_1 = u_2$$

punctele nodale se pot defini ca fiind acele puncte conjugate care introduc mărirea unghiulară egală cu +1.

2. Punctele cardinale au primit acest nume în ideea că cele trei perechi de puncte descriu complet proprietăţile de prim ordin ale unui sistem optic.

Două perechi de puncte cardinale sunt conjugate: punctul principal imagine este imaginea punctului principal obiect, acelaşi lucru fiind valabil şi pentru punctele nodale, unul este imaginea celuilalt prin sistemul considerat. Punctele focale nu sunt conjugate.

Două perechi de puncte cardinale sunt asociate la două plane (punctele focale sunt situate în planele focale, iar punctele principale se află conţinute în planele principale), dar nu există un plan nodal asociat unui punct nodal.

3. Punctele nodale se comportă similar centrului de curbură a unui dioptru sferic sau centrului optic al unei lentile subţiri.

6.2. Formarea imaginilor prin sisteme centrate

Fie raza SI_1 (figura 6.4). Se va stabili direcţia sa după ce traversează sistemul. Pentru aceasta, se determină punctul H_1, ca intersecţie a razei incidente SI_1 cu planul principal π_1. Cunoscându-l pe H_1, se determină H_2, care este în acelaşi timp şi punctul de pornire al razei emergente.

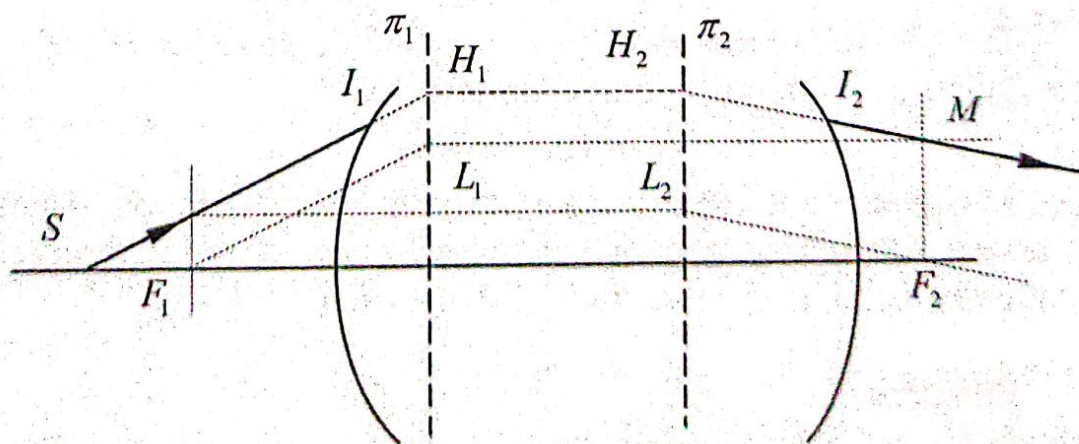


Figura 6.4. Stabilirea direcţiei de propagare a unei raze oarecare printr-un sistem centrat

Pentru determinarea unui alt punct al razei emergente, se va considera că sursa S este la infinit şi mai trimite o rază, paralelă cu prima, care va trece prin focarul obiect F_1.

Aceasta va intersecta planul principal imagine π_1 în punctul L_1, căruia îi va corespunde punctul L_2, situat în planul π_2 (se va ţine cont şi în acest caz că planele principale sunt conjugate şi introduc o mărire liniară egală cu +1). Direcţia L_1L_2 este paralelă cu axa optică, iar raza L_1L_2 rămâne paralelă cu axa optică şi după ce părăseşte sistemul. Imaginea punctului de la infinit se formează, însă, în planul focal imagine care, intersectat cu direcţia L_1L_2 dă punctul M, cel de-al doilea punct al razei emergente.

6.2.1. Reguli de construire a imaginilor

Se pot enunţa regulile de construire a imaginii, făcând o paralelă cu cele cunoscute la lentilele subţiri şi respectând notaţiile din figura 6.5 (tabelul 6.1):

Tabelul 6.1. Reguli de construire a imaginilor prin sisteme optice centrate

Nr. crt.	Reguli lentile subţiri	Reguli sisteme centrate
1	- dacă direcţia razei incidente este paralelă cu axa optică, direcţia razei emergente trece prin focarul imagine	- se construieşte raza incidentă paralelă cu axa optică principală, până întâlneşte planul principal obiect π_1 în punctul H_1 - deoarece planele principale corespund unei măriri liniare transversale egală cu +1, se „transferă" raza de la planul principal obiect π_1 la planul principal, imagine π_2, pe care îl întâlneşte în punctul H_2 - raza emergentă părăseşte sistemul în punctul H_2 şi va trece prin focarul imagine F_2
2	- dacă direcţia razei incidente trece prin	- se construieşte raza incidentă astfel încât direcţia sa să treacă prin focarul obiect F_1

	focarul obiect, direcţia razei emergente este paralelă cu axa optică	- se trasează mai departe direcţia razei incidente, până când întâlneşte planul principal obiect π_1 în punctul H_1' - se realizează „transferul" de la planul principal obiect la planul principal imagine π_2, pe care îl întâlneşte în punctul H_2' - raza emergentă părăseşte sistemul în punctul H_2', având direcţia paralelă cu axa optică principală
3	- dacă raza incidentă trece prin centrul optic al lentilei, se propagă mai departe nedeviată	- direcţia razei incidente trece prin punctul nodal obiect - direcţia razei emergente va fi paralelă cu cea a razei incidente, dar va „porni" din punctul nodal imagine

Fie un obiect liniar A_1B_1, perpendicular pe axa optică a unui sistem centrat (figura 6.5). Imaginea acestuia, A_2B_2, a fost construită folosind regulile enunţate mai sus, considerând implicit că la stânga şi la dreapta sistemului este acelaşi mediu (din acest motiv, punctele nodale se confundă cu cele principale).

În orice altă situaţie, construirea imaginii se face respectând tot aceleaşi reguli, cu menţiunea că punctele principale şi cele nodale nu coincid (figura 6.6).

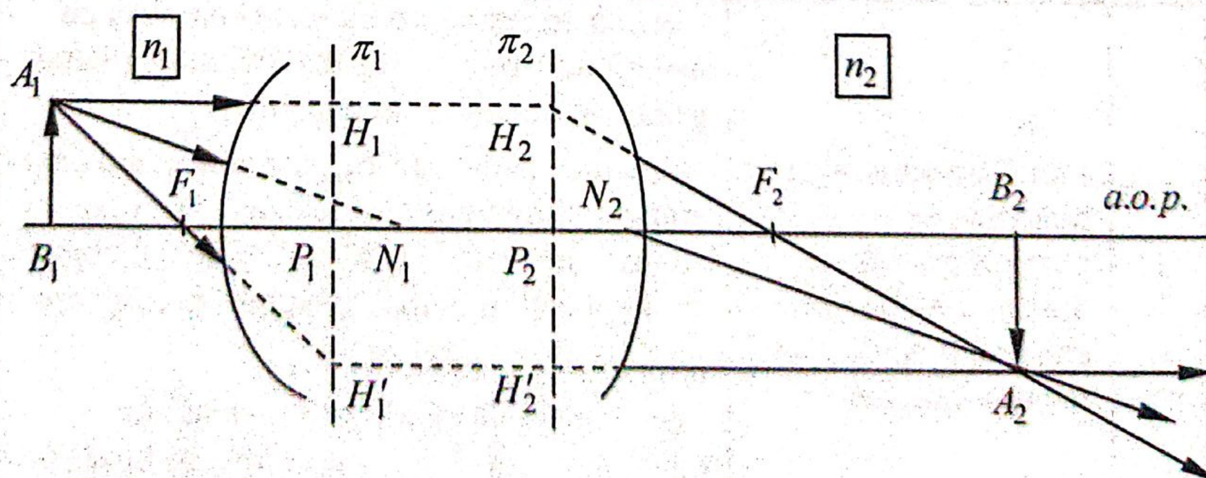


Figura 6.6. Construirea imaginii unui obiect printr-un sistem centrat, atunci când acesta este mărginit la stânga şi la dreapta de medii diferite

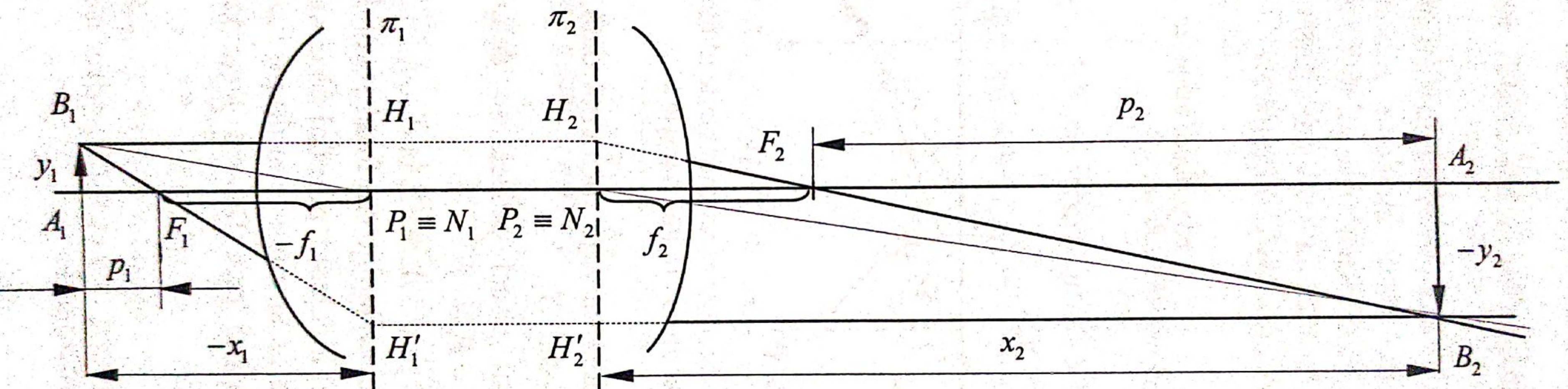


Figura 6.5. Construirea imaginii unui obiect printr-un sistem centrat, atunci când acesta este mărginit la stânga şi la dreapta de acelaşi mediu

6.2.2. Construirea imaginilor cu ajutorul focarelor

Atunci când se doreşte trasarea mersului razelor printr-un sistem optic sau determinarea direcţiei razei incidente asociate unei raze emergente date, se pot folosi focarele secundare (obiect sau imagine).

Dacă este vorba despre a căuta raza emergentă asociată unei raze incidente oarecare, se procedează astfel (figura 6.7):

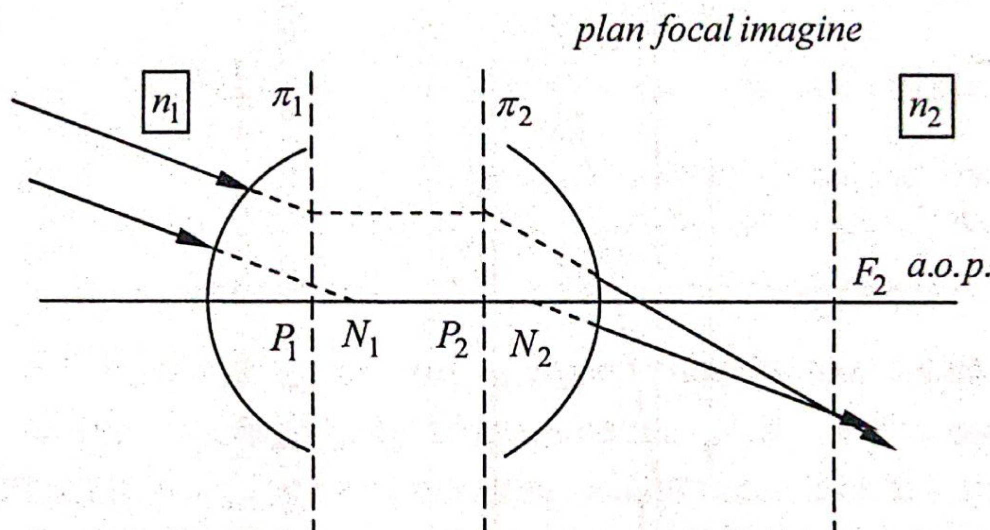


Figura 6.7. Determinarea direcţiei razei emergente atunci când raza incidentă are o direcţie oarecare

- se construieşte direcţia paralelă cu raza incidentă dată, direcţie care trebuie să treacă prin punctul nodal N_1
- cunoscând poziţia punctului nodal obiect, se determină poziţia punctului nodal imagine ($P_1N_1 = P_2N_2$)
- se duce din punctul nodal imagine o paralelă la direcţia razei incidente, care va intersecta planul focal imagine într-un focar secundar F_2'
- se poate construi direcţia razei incidente, pornind de la planul principal imagine, de la aceeaşi înălţime ca şi intersecţia dintre raza incidentă şi planul principal obiect şi trecând prin focarul secundar F_2' înainte determinat

Observaţii

Este util să se reţină următoarele:

- dacă direcția razei incidente trece prin punctul nodal obiect, atunci direcția razei emergente va trece prin punctul nodal imagine
- razele se propagă paralel cu axa între planele principale obiect și imagine
- atunci când cunoaște direcția razei emergente și vrem și se doreștet determinarea direcției razei incidente, se respectă aceiași pași, dar în sens invers; se poate invoca aici principiul reversibilității drumului razelor de lumină !

6.2.3. Relații de conjugare

În figura 6.5. se observă următoarele:

$$\Delta B_1H_1H_1' \sim \Delta F_1P_1H_1' \Rightarrow \frac{B_1H_1}{F_1P_1} = \frac{H_1H_1'}{P_1H_1'}\left(=\frac{B_1H_1'}{F_1H_1'}\right)$$

$$\frac{-x_1}{-f_1} = \frac{y_1 - y_2}{-y_2} \Rightarrow y_2 = (y_2 - y_1)\frac{f_1}{x_1}$$

respectiv:

$$\Delta H_2P_2F_2 \sim \Delta H_2H_2'B_2 \Rightarrow \frac{H_2P_2}{H_2H_2'} = \frac{P_2F_2}{H_2'B_2}\left(=\frac{H_2F_2}{H_2B_2}\right)$$

$$\frac{y_1}{y_1 - y_2} = \frac{f_2}{x_2} \Rightarrow y_1 = (y_1 - y_2)\frac{f_2}{x_2}$$

de unde rezultă *mărirea liniară*:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_2}\cdot\frac{f_1x_2}{x_1f_2} \Rightarrow \beta = -\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}$$

Din rapoartele de asemănare mai rezultă și relațiile:

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1} = \frac{f_1}{x_1}, \text{ respectiv } \frac{-y_1}{y_2 - y_1} = \frac{f_2}{x_2}$$

care se adună:

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1} - \frac{y_1}{y_2 - y_1} = \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \Rightarrow \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1$$

rezultând *ecuația punctelor conjugate.*

Conform figurii 6.5 se mai poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} p_1 - f_1 &= -x_1 \\ p_2 + f_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = \frac{f_1(p_2 + f_2) + f_2(f_1 - p_1)}{(f_1 - p_1)(p_2 + f_2)}$$

de unde:

$$f_1 f_2 = -p_1 p_2$$

adică *ecuaţia lui Newton*.

În cele prezentate mai sus s-a folosit următoarea regulă de semne:

- măsurarea distanţelor se face de la planele principale:
    - spre stânga: sunt negative
    - spre dreapta: sunt pozitive
- mărimile care nu se măsoară de la planele principale sunt pozitive dacă lumina le parcurge de la stânga la dreapta
- toate distanţele măsurate pe verticală:
    - deasupra axei: sunt pozitive
    - sub axă: sunt negative

6.3. Asocierea sistemelor centrate

Fie două sisteme centrate cu aceeaşi axă optică. Se notează cu Δ distanţa dintre focarul imagine al primului sistem la focarul obiect al celui de-al doilea sistem (figura 6.8).

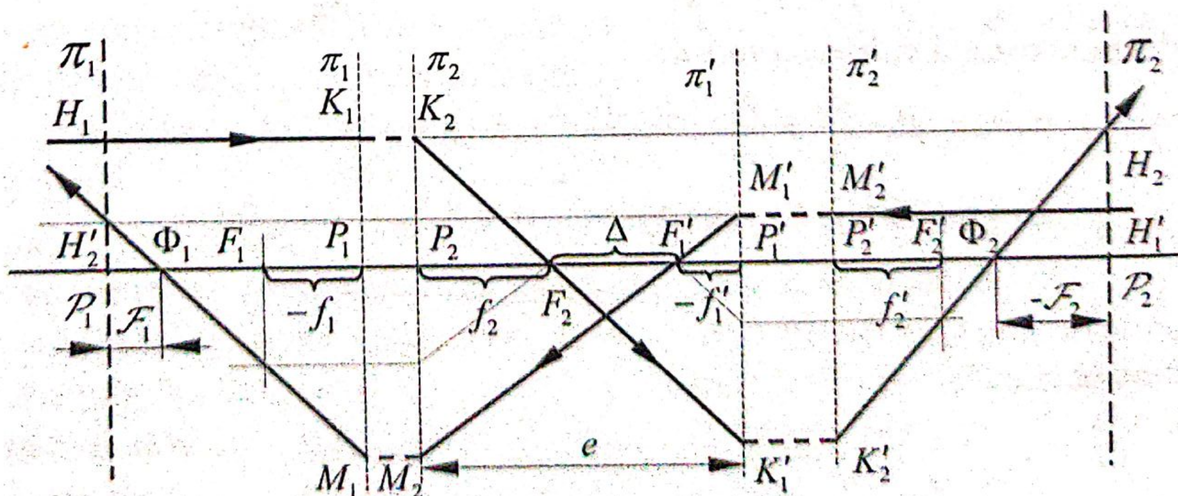


Figura 6.8. Asociaţie de sisteme centrate

Se observă că Φ_2 este imaginea lui F_2 prin al doilea sistem. Dacă se aplică relaţia lui Newton, rezultă:

$$F_2F_1' \cdot F_2'\Phi_2 = -f_1'f_2' \Rightarrow \Delta \cdot F_2'\Phi_2 = -f_1'f_2' \Rightarrow F_2'\Phi_2 = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$$

Din asemănarea triunghiurilor $\Delta K_2P_2F_2$ şi $\Delta K_1'P_1'F_2$ rezultă:

$$\frac{K_2P_2}{K_1'P_1'} = \frac{P_2F_2}{P_1'F_2}\left(=\frac{K_2F_2}{K_1'F_2}\right) \Rightarrow \frac{K_2P_2}{K_1'P_1'} = \frac{f_2}{\Delta - f_1'}$$

Din asemănarea triunghiurilor $\Delta H_2\mathcal{P}_2\Phi_2$ şi $\Delta K_2'P_2'\Phi_2$ se obţine:

$$\frac{H_2\mathcal{P}_2}{K_2'P_2'} = \frac{\mathcal{P}_2\Phi_2}{P_2'\Phi_2}\left(=\frac{H_2\Phi_2}{K_2'\Phi_2}\right) \Rightarrow \frac{H_2\mathcal{P}_2}{K_2'P_2'} = \frac{-\mathcal{F}_2}{f_2' + F_2'\Phi_2}$$

Deoarece:

$$K_2P_2 \equiv H_2\mathcal{P}_2;\ K_1'P_1' \equiv K_2'P_2'$$

rezultă egalitatea:

$$\frac{K_2P_2}{K_1'P_1'} = \frac{H_2\mathcal{P}_2}{K_2'P_2'} \Rightarrow \frac{f_2}{\Delta - f_1'} = -\frac{\mathcal{F}_2}{f_2' + F_2'\Phi_2} \Rightarrow \mathcal{F}_2 = -\frac{f_2\left(f_2' + F_2'\Phi_2\right)}{\Delta - f_1'}$$

Folosind expresia lui $F_2'\Phi_2$, rezultă:

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{f_2\left(f_2' - \dfrac{f_1'f_2'}{\Delta}\right)}{\Delta - f_1'} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{F}_2 = -\frac{f_2f_2'}{\Delta}}$$

Analog, se observă că Φ_1 este imaginea lui F_1' prin primul sistem. Se aplică:

- relaţia lui Newton:

$$F_2F_1' \cdot F_1\Phi_1 = -f_1f_2 \Rightarrow \Delta \cdot F_1\Phi_1 = -f_1f_2 \Rightarrow F_1\Phi_1 = -\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

- asemănarea triunghiurilor $\Delta M_2P_2F_1'$ şi $\Delta M_1'P_1'F_1'$:

$$\frac{M_1'P_1'}{M_2P_2} = \frac{P_1'F_1'}{P_2F_1'}\left(=\frac{M_1'F_1'}{M_2F_1'}\right) \Rightarrow \frac{M_1'P_1'}{M_2P_2} = \frac{-f_1'}{\Delta + f_2}$$

- asemănarea triunghiurilor $\Delta H_2'\mathcal{P}_1\Phi_1$ şi $\Delta M_1P_1\Phi_1$:

$$\frac{H_2'\mathcal{P}_1}{M_1P_1}=\frac{\mathcal{P}_1\Phi_1}{P_1\Phi_1}\left(=\frac{H_2'\Phi_1}{M_1\Phi_1}\right)\Rightarrow\frac{H_2'\mathcal{P}_1}{M_1P_1}=\frac{\mathcal{F}_1}{F_1\Phi_1-f_1}$$

Se ţine cont de:

$$M_1P_1\equiv M_2P_2$$
$$M_1'P_1'\equiv H_2'\mathcal{P}_1$$

şi rezultă:

$$\frac{M_1'P_1'}{M_2P_2}=\frac{H_2'\mathcal{P}_1}{M_1P_1}\Rightarrow\frac{-f_1'}{\Delta+f_2}=\frac{\mathcal{F}_1}{F_1\Phi_1-f_1}\Rightarrow\mathcal{F}_1=-\frac{f_1'\left(-\frac{f_1f_2}{\Delta}-f_1\right)}{\Delta+f_2}$$

$$\mathcal{F}_1=\frac{f_1f_1'}{\Delta}$$

6.4. Mărirea liniară a sistemului afocal

Dacă în relaţiile obţinute mai sus, $\Delta=0$, focarul imagine al primului sistem coincide cu focarul obiect al celui de-al doilea sistem, iar ansamblul se numeşte *ansamblu afocal* sau *telescopic* (figura 6.9). Rezultă că distanţele focale au valoarea:

$$\mathcal{F}_1=\infty;\ \mathcal{F}_2=-\infty$$

deci un fascicul paralel rămâne paralel şi după traversarea celor două sisteme.

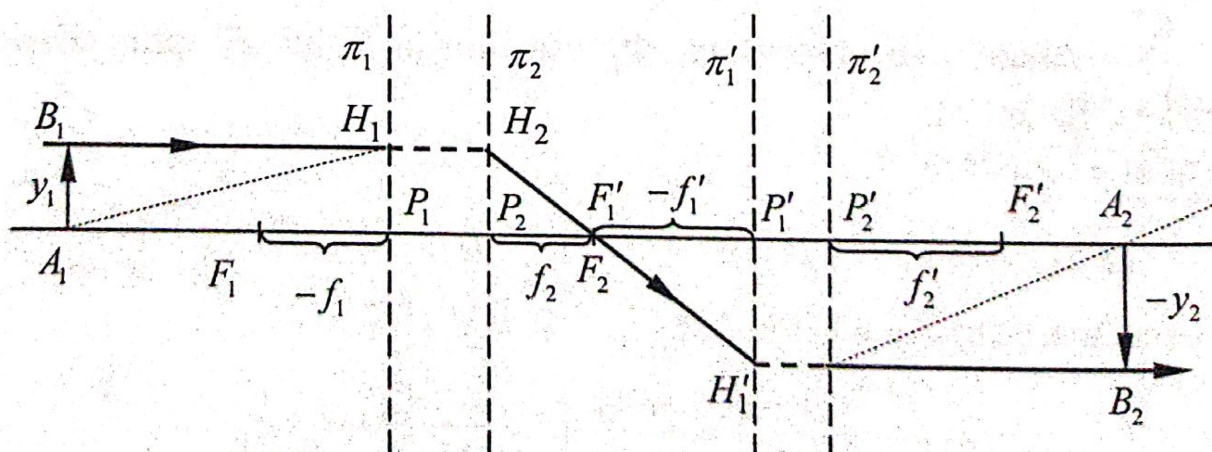


Figura 6.9. Mersul razelor de lumină printr-un sistem afocal

Se identifică triunghiurile asemenea $\Delta H_2P_2F_2$ şi $\Delta H_1'P_1'F_2$ şi se scrie raportul de asemănare:

$$\frac{H_2P_2}{H_1'P_1'} = \frac{P_2F_2}{P_1'F_2}\left(= \frac{H_2F_2}{H_1'F_2}\right) \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2} = \frac{f_2}{-f_1'}$$

Mărirea liniară a sistemului este:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{f_1'}{f_2}$$

Se observă că mărirea liniară este aceeaşi, oricare ar fi poziţia obiectului.

6.5. Lentila groasă

Se introduce noţiunea de lentilă (sferică) groasă ca un sistem de doi dioptri ale căror vârfuri sunt separate prin distanţa e, cuprinzând un mediu de indice de refracţie n. Pentru simplitatea calculelor, se va considera că lentila este plasată în aer ($n_{aer} = 1$).

Sistemul celor doi dioptri formează o asociere de sisteme centrate, în care fiecare dioptru este un sistem centrat în care planele principale se confundă şi trec prin vârful fiecărui dioptru (figura 6.10). Distanţele focale ale primului dioptru reprezintă distanţele focale ale primului sistem centrat, iar distanţele focale ale celui de-al doilea dioptru reprezintă distanţele focale ale celuilalt sistem centrat.

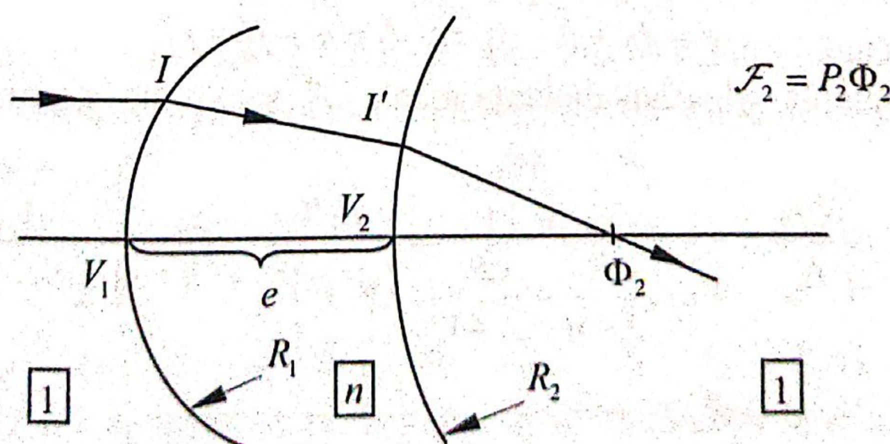


Figura 6.10. Lentila groasă văzută ca sistem de doi dioptri

Distanţele focale se măsoară faţă de vârfuri, prin care se consideră că trec planele principale (confundate) ale fiecărui dioptru.

Ecuaţia punctelor conjugate pentru primul dioptru este:

$$\frac{n}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{n-1}{R_1}$$

din care se determină expresia celor două focare:
- obiect:

$$x_2 \to \infty \Rightarrow x_1 \to f_1 \Rightarrow -\frac{1}{f_1}=\frac{n-1}{R_1} \Rightarrow f_1=-\frac{R_1}{n-1}$$

- imagine:

$$x_1 \to \infty \Rightarrow x_2 \to f_2 \Rightarrow \frac{n}{f_2}=\frac{n-1}{R_1} \Rightarrow f_2=\frac{nR_1}{n-1}$$

Ecuaţia punctelor conjugate pentru al doilea dioptru este:

$$\frac{1}{p_2'}-\frac{n}{p_1'}=\frac{1-n}{R_2}$$

din care rezultă expresia celor două distanţe focale:
- obiect:

$$x_2' \to \infty \Rightarrow x_1' \to f_1' \Rightarrow -\frac{n}{f_1'}=\frac{1-n}{R_2} \Rightarrow f_1'=-\frac{nR_2}{1-n}$$

- imagine:

$$x_1' \to \infty \Rightarrow x_2' \to f_2' \Rightarrow \frac{1}{f_2'}=\frac{1-n}{R_2} \Rightarrow f_2'=\frac{R_2}{1-n}$$

Se observă că (figura 6.8):

$$e=f_2+\Delta-f_1' \Rightarrow \Delta=e+f_1'-f_2$$

şi se pot calcula cele două distanţe focale $\mathcal{F}_1$ şi $\mathcal{F}_2$ ale sistemului:

$$\mathcal{F}_2=-\frac{f_2'f_2}{\Delta}=-\frac{\frac{R_2}{1-n}\cdot\frac{nR_1}{n-1}}{e-\frac{nR_2}{1-n}-\frac{nR_1}{n-1}}=\frac{nR_1R_2}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)}{e(n-1)+nR_2-nR_1}$$

$$\mathcal{F}_2=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{e(n-1)^2}{nR_1R_2}}$$

respectiv:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} = -\frac{\frac{R_1}{n-1}\cdot\left(-\frac{nR_2}{1-n}\right)}{e - \frac{nR_2}{1-n} - \frac{nR_1}{n-1}} = -\frac{nR_1R_2}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)}{e(n-1)+nR_2-nR_1}$$

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{e(n-1)^2}{nR_1R_2}}$$

Se observă că între distanţele focale ale lentilei groase există relaţia:

$$\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$$

respectiv între convergenţe:

$$\frac{1}{\mathcal{F}_2} = -\frac{1}{\mathcal{F}_1} \Rightarrow \mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}_1$$

Observaţii

1. Expresia distanţei focale imagine, de exemplu, se poate deduce din:

$$\frac{1}{F_{im}} = \frac{(n-1)\left[e(n-1)+nR_2-nR_1\right]}{nR_1R_2} = \frac{e(n-1)^2+n(n-1)R_2-n(n-1)R_1}{nR_1R_2} =$$

$$= \frac{e}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{n-1}{R_2}+\frac{n-1}{R_1}-\frac{n-1}{R_2}$$

Se identifică în relaţia de mai sus distanţa focală obiect a primului dioptru, f_1, respectiv distanţa focală imagine a celui de al doilea dioptru, f_2'.

Rezultă astfel:

$$\frac{1}{F_{im}} = \frac{e}{n}\cdot\left(-\frac{1}{f_1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{f_2'}\right)-\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2'} = -\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2'}+\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{f_2'}$$

Se obişnuieşte să se folosească notaţiile din tabelul 6.2 şi se obţine relaţia lui Gullstrand:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n}P_1P_2$$

Tabelul 6.2. Semnificaţia notaţiilor din expresia puterii optice echivalente a unei asociaţii de două sisteme centrate

Nr. crt.	Notaţie	Semnificaţie
1	$P = \frac{1}{F_{im}}$	- puterea optică echivalentă a sistemului centrat - reprezintă, practic, convergenţa lentilei groase (exprimată în m^{-1}, adică în *dioptrii*)
2	$P_1 = -\frac{1}{f_1}$	- puterea optică a primei feţe a lentilei groase (exprimată în m^{-1}, adică în *dioptrii*)
3	$P_2 = \frac{1}{f_2'}$	- puterea optică a celei de a doua feţe a lentilei groase (exprimată în m^{-1}, adică în *dioptrii*)

2. Dacă în relaţia de mai sus se consideră că grosimea lentilei poate fi neglijată, se obţine:

$$P = P_1 + P_2 = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2'} = \frac{n-1}{R_1} - \frac{n-1}{R_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

adică ecuaţia punctelor conjugate a lentilelor subţiri

3. Ecuaţia punctelor conjugate obţinută pentru lentilele subţiri îşi păstrează valabilitatea şi în cazul lentilelor groase, obiectul, respectiv imaginea, poziţionându-se faţă de planele principale corespunzătoare (şi vor fi considerate pozitive dacă se citesc la dreapta acestora, respectiv negative dacă se citesc la stânga lor, conform regulilor convenţiei geometrice de semne).

6.6. Formule generale pentru determinarea poziţiei punctelor cardinale ale unei lentile groase

În studiul comportării sistemelor centrate se lucrează cu o serie de expresii matematice care poziţionează punctele cardinale faţă de punctele principale sau faţă de focarele acestuia.

În cazul lentilelor groase, acestea se deduc în general prin folosirea formalismului matriceal. Se notează:

- n_1 - indicele de refracţie al mediului de incidenţă (în spaţiul obiect)
- n_2 - indicele de refracţie al mediului de emergenţă (în spaţiul imagine)

- n - indicele de refracţie al lentilei
- e - grosimea lentilei

Se obţin următoarele relaţii:

- puterea optică echivalentă (Gullstrand):

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2$$

unde, P_1 este puterea optică a primei feţe a lentilei, iar P_2 este puterea optică a celei de a doua feţe a acesteia:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1}$$

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2}$$

- localizarea planului principal obiect, respectiv a punctului principal obiect

$$l_1 = V_1 P_1 = \frac{n_1 e}{n} \cdot \frac{P_2}{P}$$

- localizarea planului principal imagine, respectiv a punctului principal imagine

$$l_2 = V_2 P_2 = -\frac{n_2 e}{n} \cdot \frac{P_1}{P}$$

- localizarea planului focal obiect, respectiv a focarului principal obiect

$$f_1' = V_1 F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P}$$

relaţie care este valabilă atunci când mediile care mărginesc lentila au acelaşi indice de refracţie, respectiv:

$$f_1 = P_1 F_1 = -\frac{n_1}{P}$$

atunci când mediile care mărginesc lentila au indice de refracţie diferit

- localizarea planului focal imagine, respectiv a focarului principal imagine

$$f_2' = V_2 F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P}$$

relaţie valabilă atunci când mediile care mărginesc lentila au acelaşi indice de refracţie, respectiv:

$$f_2 = P_2F_2 = \frac{n_2}{P}$$

atunci când mediile care mărginesc lentila au indice de refracţie diferit
- pentru determinarea poziţiei punctelor nodale N_1 şi N_2 se vor folosi relaţiile:

$$N_1N_2 = P_1P_2$$
$$P_1N_1 = P_2N_2$$
$$F_1N_1 = f_2$$
$$N_2F_2 = f_1$$

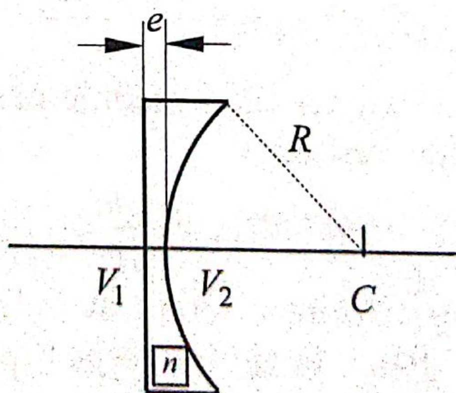
- mărirea liniară a sistemului:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

6.7. Aplicaţii

Problema nr. 1.

Se consideră o lentilă de grosime $e = 1,5\,cm$, având forma ca în figură. Să se determine poziţia punctelor cardinale ale acesteia, ştiind că materialul din care este confecţionată are un indice de refracţie egal cu 1,5, iar raza feţei curbe este $R = 15\,cm$.



Rezolvare

- puterea optică a primei feţe:

$$P_1 = 0\,dioptrii$$

rezultat care era de aşteptat, deoarece prima faţă a lentilei este plană
- puterea optică a celei de a doua feţe este:

$$P_2 = -\frac{1,5-1}{1,5\cdot 10^{-2}} = -3,33\,dioptrii\left(m^{-1}\right)$$

şi deci puterea optică a sistemului:

$$P = P_2 = -3,33\ dioptrii\left(m^{-1}\right)$$

- se observă că valoarea obţinută este negativă; sistemul este divergent
- se determină poziţiile punctelor cardinale ale sistemului considerat; poziţia punctului principal obiect şi a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1\mathcal{P}_1 = \frac{e}{n}\cdot\frac{P_2}{P} = \frac{e}{n} = \frac{1,5}{1,5} = 1\,cm$$

unde s-a ţinut cont de faptul că $P = P_2$

- se observă că $l_1 > 0$, ceea ce înseamnă că planul principal obiect este spre dreapta; în figură, el este notat cu π_1
- la intersecţia planului principal obiect cu axa optică principală se află punctul principal obiect, $\mathcal{P}_1$
- poziţia planului principal imagine se determină cu ajutorul relaţiei:

$$l_2 = V_2\mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n}\cdot\frac{P_1}{P} = 0\,cm$$

deci el este tangent la curbura lentilei; în figură, a fost notat cu π_2

- la intersecţia sa cu axa optică principală se află punctul principal imagine $\mathcal{P}_2$; el coincide cu vârful V_2 al feţei curbe a lentilei divergente
- poziţia focarului obiect (faţă de V_1):

$$f_1' = V_1F_1 = -\frac{1}{P_2} + \frac{e}{n} = 31\,cm$$

unde s-a ţinut cont de faptul că $P = P_2$.

- distanţa focală obiect (faţă de $\mathcal{P}_1$):

$$f_1 = 31 - 1 = 30\,cm$$

- rezultă că distanţa focală obiect se măsoară la dreapta vârfului V_1, deci focarul corespunzător este virtual, plasat în spaţiul imagine
- poziţia focarului imagine (faţă de V_2):

$$f_2' = V_2F_2 = \frac{1-\frac{e}{n}P_1}{P} = \frac{1}{P_2} = -30\,cm$$

unde s-a ţinut cont de faptul că $P = P_2$

- distanţa focală imagine (faţă de $\mathcal{P}_2$):

$$f_2 = \mathcal{P}_2 F_2 = \frac{1}{P_2} = -30\,cm$$

deoarece punctul principal imagine coincide cu vârful V_2 al feţei curbe a lentilei divergente

- focarul imagine se află la stânga vârfului V_2, deci este un focar virtual
- se observă că este îndeplinită condiţia ca cele două distanţe focale ale lentilei să fie egale în modul, în condiţiile în care acesta este mărginit de acelaşi mediu (aerul)

$$|f_2| = f_2 = 30\,cm$$

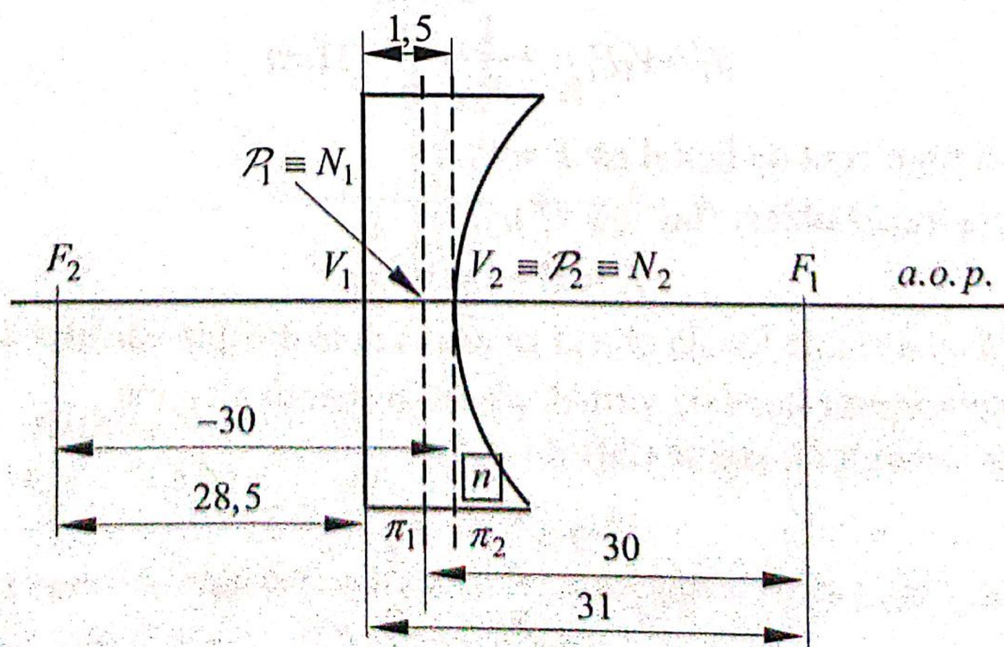
- se poate spune că sistemul dat este o lentilă divergentă având distanţa focală $f = -30\,cm$
- faţă de vârful V_1, focarul imagine al lentilei se află la distanţa:

$$V_1F_2 = -f_2 - e = 30 - 1{,}5 = 28{,}5\,cm$$

- deoarece lentila este mărginită şi la stânga şi la dreapta de acelaşi mediu (aerul), punctele nodale obiect (N_1) şi imagine (N_2) coincid cu punctele principale corespunzătoare:

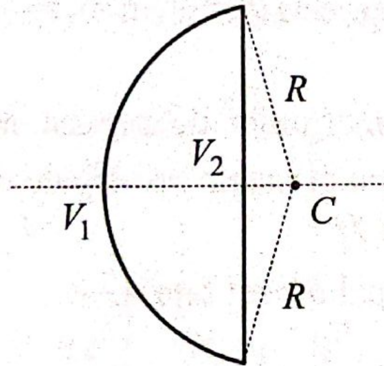
$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \qquad\qquad N_2 \equiv \mathcal{P}_2 (\equiv V_2)$$

- poziţia punctelor cardinale este ilustrată în figură:



Problema nr. 2.

Se consideră o lentilă de grosime $e = 9,1 cm$, având forma ca în figură. Să se determine poziția punctelor cardinale ale acesteia, știind că materialul din care este confecționată are un indice de refracție egal cu 1,5, iar raza primei fețe este $R = 9 cm$.



Rezolvare

- puterea optică a primei fețe este:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{n-1}{R} = \frac{1,5-1}{9 \cdot 10^{-2}} = 5,55\, dioptrii$$

- puterea optică a celei de a doua fețe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{\infty} = 0\, dioptrii$$

- deoarece a doua față este plană, puterea sa optică este nulă
- rezultă astfel puterea optică a blocului optic:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 = 5,55 + 0 - \frac{9,1 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 5,55 \cdot 0 = 5,55\, dioptrii \left(= P_1\right)$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci sistemul este convergent
- se determină pozițiile punctelor cardinale ale sistemului considerat; poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = 0 (cm)$$

- rezultă că punctul principal obiect coincide cu vârful V_1 al primei suprafețe:

$$\mathcal{P}_1 \equiv V_1$$

deci planul principal obiect este tangent la lentilă în punctul V_1

- poziţia punctului principal imagine şi a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2\mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n}\cdot\frac{P_1}{P} = -\frac{9,1}{1,5}\cdot\frac{5,55}{5,55} = -6,07\,cm\,(<0)$$

- rezultă că punctul principal imagine este situat în stânga vârfului V_2 al celei de a doua suprafeţe (al suprafeţei plane)
- planul principal imagine este perpendicular pe axa optică principală a lentilei în $\mathcal{P}_2$
- deoarece lentila este mărginită de acelaşi mediu (aer, cu $n_{aer} = 1$), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \qquad\qquad N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziţia focarului principal obiect faţă de V_1:

$$f_1 = V_1F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n}\cdot\frac{P_2}{P} = -\frac{1}{P_1} = -18\,cm\,(<0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui V_1
- poziţia focarului principal obiect faţă de punctul principal obiect $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{P}_1F_1 \equiv V_1F_1 = -18\,cm$$

- poziţia focarului principal imagine faţă de V_2:

$$f_2 = V_2F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n}\cdot\frac{P_1}{P} = \frac{1}{P_1} - \frac{e}{n} = 18 - \frac{9,1}{1,5} = 11,93\,cm\,(>0)$$

deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui V_2
- poziţia focarului principal imagine faţă de punctul principal imagine $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2F_2 \equiv \mathcal{P}_2V_2 + V_2F_2 = 6,07 + 11,93 = 18\,cm$$

Observaţie

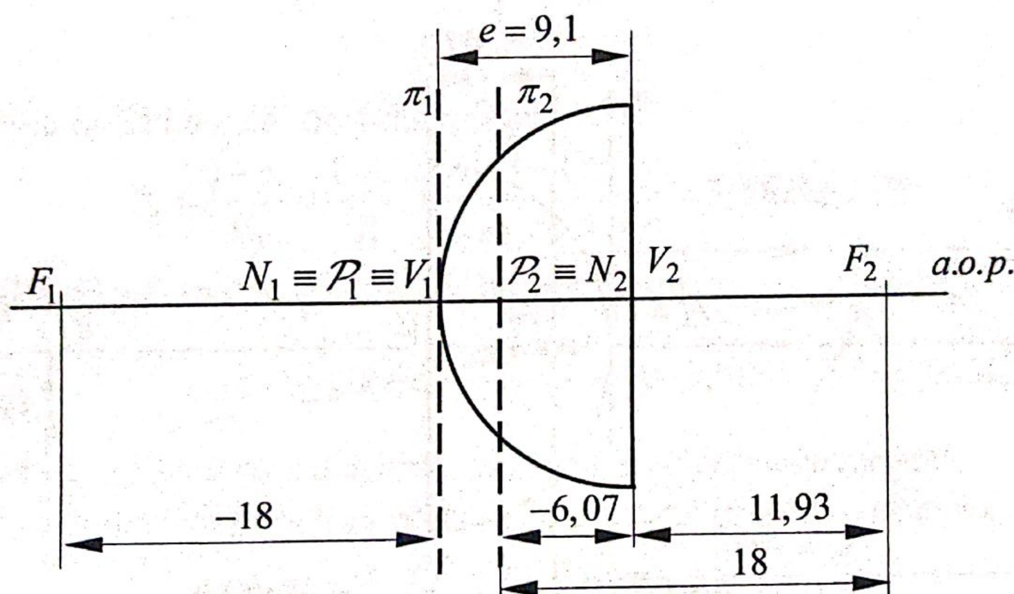
- poziţiile celor două focare faţă de punctele principale corespunzătoare se pot calcula şi cu expresiile:

$$\mathcal{P}_1F_1 = -\frac{n_1}{P} = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{5,55} = -18\,cm$$

respectiv:

$$\mathcal{P}_2F_2 = \frac{n_2}{P} = \frac{1}{P} = \frac{1}{5,55} = 18\,cm$$

- se vede că, indiferent de modul de calcul, cele două focare sunt poziţionate la distanţe egale faţă de punctele principale corespunzătoare, în spaţiile obiect, respectiv imagine, aşa după cum era de aşteptat
- ducând prin cele două focare principale planele perpendiculare pe axa optică principală se obţin planele focale obiect, respectiv imagine, care conţin focarele lentilei
- poziţia punctelor cardinale este ilustrată în figura de mai jos:



Problema nr. 3.

Se consideră un obiect liniar având înălţimea de $5cm$, perpendicular pe axa optică principală a lentilei din problema precedentă, situat la o distanţă de $31cm$ faţă de aceasta. Caracterizaţi imaginea obţinută.

Rezolvare

- cunoscând că distanţa focală a lentilei groase este de $18cm$, cu ajutorul ecuaţiei punctelor conjugate se poate obţine poziţia imaginii:

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=\frac{18(-31)}{18-31}=42,92cm=\mathcal{P}_2B_2$$

unde:

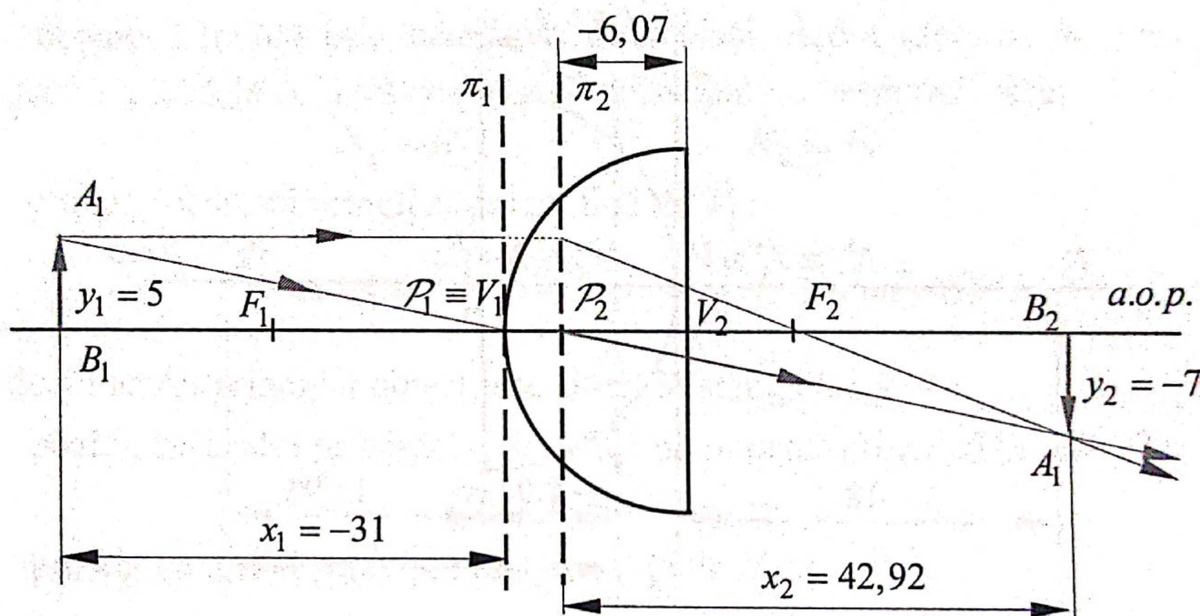
$$x_1=\mathcal{P}_1B_1=-31cm=V_1B_1$$

- se observă că $x_2>0$, deci imaginea este reală
- folosind mărirea liniară transversală, se determină mărimea imaginii:

$$\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{42,92}{-31} = -1,4$$

$$\beta_1 = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -7\ cm < 0$$

deci imaginea este răsturnată, adică este reală
- formarea imaginii prin lentila groasă este ilustrată în figura de mai jos:



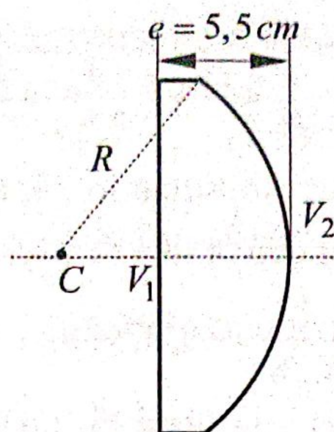
Problema nr. 4.

Se consideră lentila groasă din figură. Stabiliţi poziţia punctelor cardinale şi caracterizaţi imaginea unui obiect liniar având înălţimea de $5cm$, situat perpendicular pe axa optică principală, la o distanţă de $35cm$ de lentilă. Indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată este egal cu 1,5, iar raza celei de a doua feţe este de $13,97cm$.

Rezolvare
- puterea optică a primei feţe este:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{n-1}{\infty} = 0\,dioptrii$$

rezultat care era de aşteptat, deoarece această faţă este plană, deci puterea sa optică este nulă



- puterea optică a celei de a doua fețe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{R} = \frac{1-1,5}{-13,97 \cdot 10^{-2}} = 3,58\, dioptrii$$

- rezultă că puterea optică a blocului optic este:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 = 0 + 3,58 - \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 0 \cdot 3,58 = 3,58\, dioptrii \left(= P_2\right)$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci sistemul este convergent
- poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = \frac{e}{n} = \frac{5,5}{1,5} = 3,66\, cm \left(> 0\right)$$

- rezultă că punctul principal obiect este situat în dreapta vârfului V_1 al primei suprafețe (al suprafeței plane)
- planul principal obiect, π_1, este perpendicular pe axa optică principală a lentilei și trece prin $\mathcal{P}_1$
- poziția punctului principal imagine și a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2 \mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = 0$$

- planul principal imagine π_2 este tangent la lentilă în punctul V_2
- deoarece în stânga (spațiul obiect) și în dreapta lentilei (spațiul imagine) este același mediu (aer, cu $n_{aer} = 1$), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1$$
$$N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziția focarului principal obiect față de V_1:

$$f_1 = V_1F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = -\frac{1}{P_2} + \frac{e}{n} = -\frac{1}{3,58} + \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{1,5} = -24,27\,cm(<0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui V_1

- poziţia focarului principal obiect faţă de punctul principal obiect $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{P}_1F_1 = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{3,58} = -0,2793\,m = -27,93\,cm(<0)$$

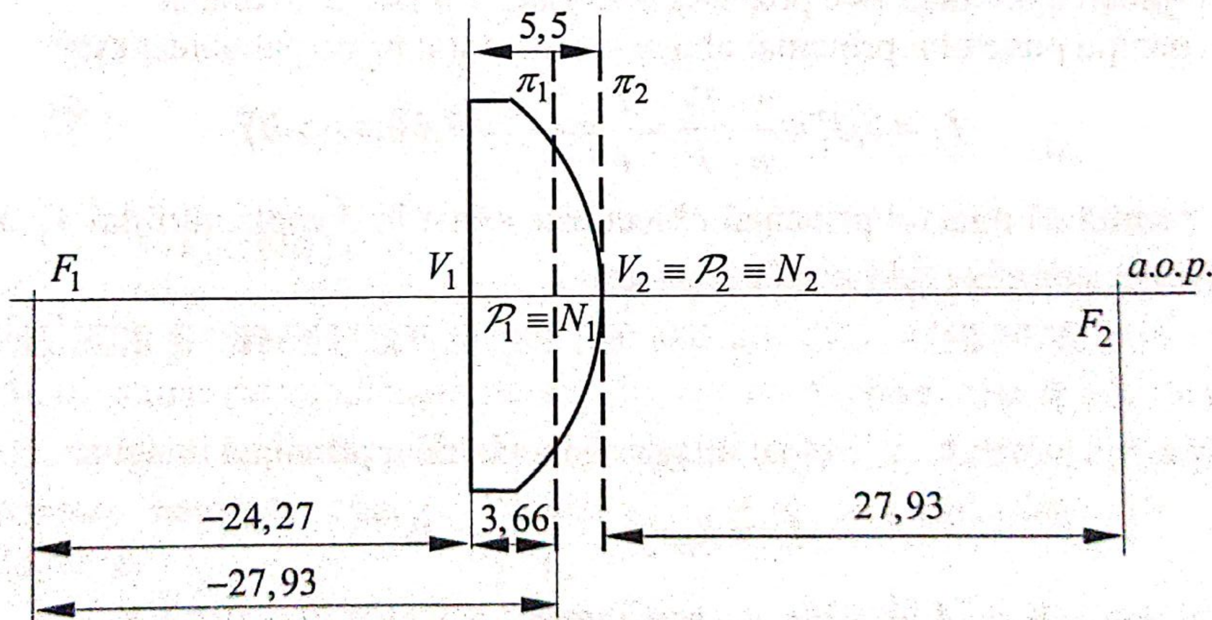
deci focarul principal obiect este situat în stânga lui $\mathcal{P}_1$

- poziţia focarului principal imagine faţă de V_2:

$$f_2 = V_2F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{3,58} = 0,2793\,m = 27,93\,cm(>0)$$

deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui V_2, care coincide cu $\mathcal{P}_2$.

- situaţia este cea din figură:



- cunoscând distanţa focală a lentilei groase (de $27,93\,cm$), cu ajutorul ecuaţiei punctelor conjugate se poate obţine poziţia imaginii:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = \frac{27,93 \cdot (-38,66)}{27,93 - 38,66} = 100,63\,cm = \mathcal{P}_2B_2$$

unde:

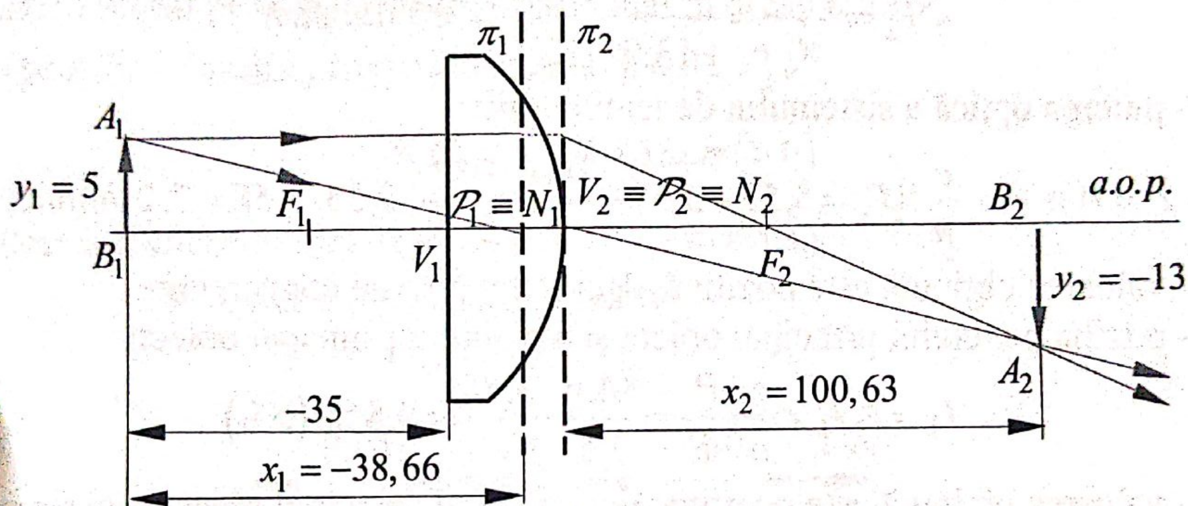
$$x_1 = \mathcal{P}_1B_1 = \mathcal{P}_1V_1 + V_1B_1 = -3,66 - 35 = -38,66\,cm$$

- folosind mărirea liniară transversală, se determină mărimea imaginii:

$$\beta_2 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{100,63}{-38,66} = -2,6$$

$$\beta_2 = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -13\,cm$$

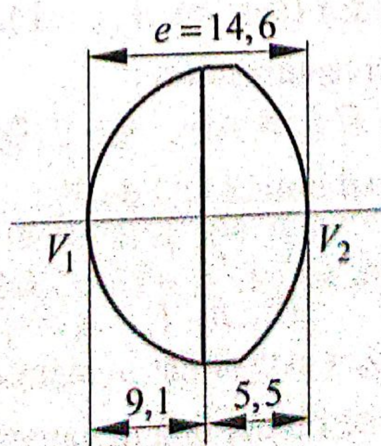
- formarea imaginii este prezentată în figura de mai jos:



Problema nr. 5.

Să se caracterizeze sistemul format prin asocierea celor două lentile din problemele precedente, aşezate ca în figură. Dacă în faţa lentilei astfel obţinute se aşează un obiect luminos, liniar, la o distanţă de $22\,cm$ de aceasta, stabiliţi tipul imaginii formate de noul sistem optic, ştiind că obiectul are $5\,cm$ înălţime şi este situat perpendicular pe axa optică principală.

Rezolvare



- grosimea lentilei este:

$$e = 9,1 + 5,5 = 14,6\,cm$$

- puterea optică a primei feţe:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{1,5-1}{9 \cdot 10^{-2}} = 5,55\,dioptrii$$

- puterea optică a celei de a doua feţe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-1,5}{-13,97 \cdot 10^{-2}} = 3,58\,dioptrii$$

- puterea optică a sistemului de lentile lipite:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n}P_1P_2 = 5,55 + 3,58 - \frac{14,6 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 5,55 \cdot 3,58 = 7,2\,dioptrii$$

- valoarea obţinută este pozitivă, deci sistemul este convergent
- poziţia punctului principal obiect şi a planului principal obiect:

$$l_1 = V_1\mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = \frac{14,6}{1,5} \cdot \frac{3,58}{7,2} = 4,8\,cm\,(>0)$$

- valoarea obţinută este pozitivă, deci punctul principal obiect este situat în dreapta vârfului V_1 al primei suprafeţe (al suprafeţei plane)
- planul principal obiect, π_1, este perpendicular pe axa optică principală şi trece prin $\mathcal{P}_1$
- poziţia punctului principal imagine şi a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2\mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = -\frac{14,6}{1,5} \cdot \frac{5,55}{7,2} = -7,50\,cm\,(<0)$$

- planul principal imagine π_2 este situat la stânga lui V_2
- deoarece în stânga (spaţiul obiect) şi în dreapta lentilei (spaţiul imagine) este acelaşi mediu (aer, cu $n_{aer} = 1$), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \qquad\qquad N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziţia focarului principal obiect faţă de V_1:

$$f_1 = V_1F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = -9,04\,cm\,(<0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui V_1
- poziţia focarului principal obiect faţă de punctul principal obiect $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{P}_1F_1 = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{7,2} = -0,1388\,m = -13,88\,cm\,(<0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui $\mathcal{P}_1$

- poziţia focarului principal imagine faţă de V_2:

$$f_2 = V_2F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n}\cdot\frac{P_1}{P} = 6,38\,cm\,(>0)$$

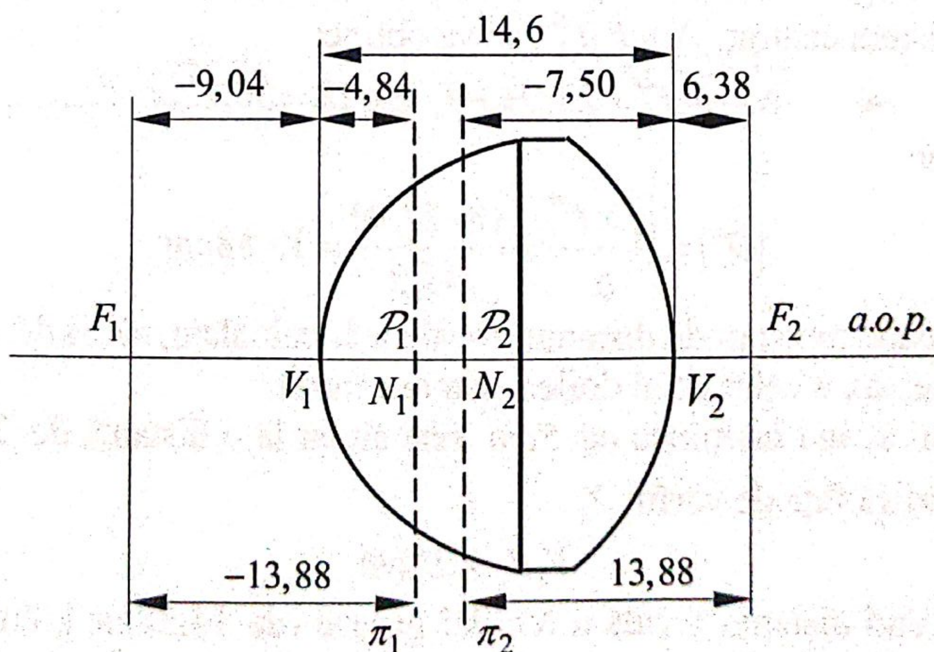
deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui V_2

- poziţia focarului principal imagine faţă de $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2F_2 = \frac{1}{P} = 13,88\,cm\,(>0)$$

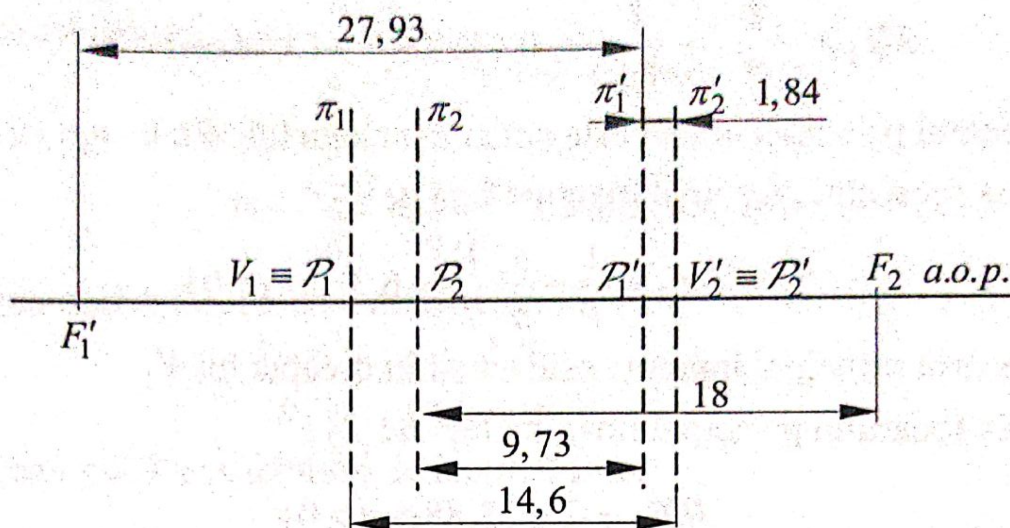
deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui $\mathcal{P}_2$

Situaţia este prezentată în figură:



Observaţie

- lentila de mai sus poate fi considerată ca o asociere de două sisteme centrate
- ţinând cont de poziţiile relative ale punctelor cardinale ale fiecărui sistem centrat, situaţia este cea din figura de mai jos (tot ce este notat cu „prim" ţine de a doua lentilă):



- folosind rezultatele privind mărimea distanţelor focale ale unei asocieri de sisteme centrate, în care mărimea notată cu Δ este distanţa dintre focarul imagine al primului sistem centrat şi focarul obiect al celui de al doilea sistem centrat, $\Delta = F_2F_1'$, se va obţine:

$$\Delta = F_2F_1' = 27,93 - 9,73 + 18 = 36,2\,cm$$

respectiv:

$$|\mathscr{F}| = \frac{|f \cdot f'|}{\Delta} = \frac{18 \cdot 27,93}{36,2} = 13,88\,cm$$

valoare care corespunde distanţei focale atât calculate, cât şi determinate experimental, a celui de al doilea sistem centrat

- obiectul având înălţimea de $5\,cm$ este situat la o distanţă de $22\,cm$ de lentilă, adică faţă de vârful V_1

$$V_1B_1 = 22\,cm$$

- cunoscând distanţa focală a lentilei groase (de $13,88\,cm$), cu ajutorul ecuaţiei punctelor conjugate se poate obţine poziţia imaginii:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = \frac{13,88 \cdot (-26,84)}{13,88 - 26,84} = -28,74\,cm = \mathcal{P}_2B_2$$

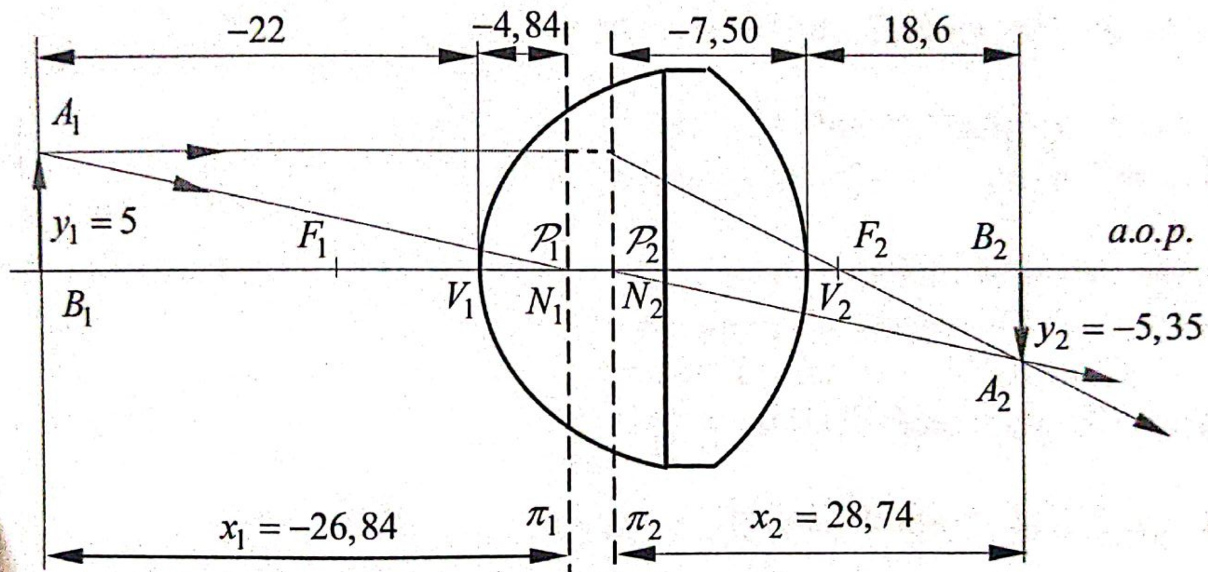
unde:

$$x_1 = \mathcal{P}_1B_1 = \mathcal{P}_1V_1 + V_1B_1 = -4,84 - 22 = -26,84\,cm$$

- folosind expresia măririi liniare transversale, se determină mărimea imaginii:

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \beta = \frac{28,74}{-26,84} = -1,07$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -5,35\,cm$$



BIBLIOGRAFIE

[1] G. G. Brătescu – Optica, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985

[2] I. Bunget (coord) - Compendiu de fizică, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988

[3] T. Creţu – Fizica generală, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984

[4] P. Dodoc – Teoria şi construcţia sistemelor optice, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982

[5] N. Gherbanovschi, M. Prodan, Şt. Levai - Fizică. Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985

[6] O. Gherman, E. Magyari, L. Méder, L. Saliu, L. Tătar, F. Uliu – Probleme de fizică pentru liceu, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1975

[7] I. Ioviţ-Popescu, E. I. Toader - Optica, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1989

[8] E. Luca – Fizică generală, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1996

[9] D. Meister - Wavefront aberrations and spectacle lenses, part one and part two, Dispensing Optics, January 2010, http://64.50.176.246/files/wavefront_aberrations_and_spectacle_lenses.pdf

[10] I. Milea – Optica, Vol. I şi II, Editura Universităţii din Oradea, 1998

[11] G. C. Moisil, E. Curatu - Optică. Teorie şi aplicaţii, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986

[12] I. Pogany – Fotografia de la teorie la practică, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987

[13] I. I. Popescu, E. I. Toader – Optica, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989

[14] J. Roussel – Optique géometrique, Cours, 2018, https://femto-physique.fr/optique/pdf/book-optgeo.pdf

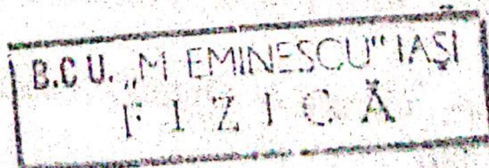
[15] Sbârciog, C. - Subiecte de fizică, Vol. 2, Editura Universităţii din Oradea, 2008

[16] H. Ţintea – Optică şi spectroscopie, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[17] L. Veissier – Optique géométrique, https://liovis.files.wordpress.com/2009/08/cours-optique-gc3a9o.pdf

SURSE WEB

http://www.wiley-vch.de/books/sample/3527403809_c01.pdf
http://users.polytech.unice.fr/~labonte/documents/Optique/cours_optique.pdf
http://www.drdrbill.com/downloads/optics/geometric-optics/Thick_Lenses.pdf





ISBN: 978-606-26-1185-9